Inauguramos neste número a seção de cartas. Todas as cartas devem ser enviadas diretamente ao editor-chefe (ver endereços à página 4).

Reformulação

Como leitor e colaborador da *Matemática Universitária*, parabenizo-os efusivamente pela reformulação feita na revista. Acabo de recebê-la e fiquei muito feliz com a remodelação, para melhor, muito melhor. Desejo longa vida à nova MU!
Geraldo Botelho
02.out.2008

Estou impressionado com a qualidade da nova MU, em todos os sentidos. Foi realmente uma excelente surpresa recebê-la e ter o prazer de vê-la revigorada. Parabéns!
Edmilson Motta
02.out.2008

A nova *Matemática Universitária* está excelente. Parabéns aos responsáveis!
Marcelo Viana
08.abr.2009

Farah e o Axioma da Escolha

Alguns colegas procuraram os editores da *Matemática Universitária* fazer algumasvobservações com relação à frase "... acreditamos ser esta a primeira publicação em português e no Brasil de uma demonstração detalhada e válida também para a equivalência entre o Axioma da Escolha e a versão do Teorema de Tychonoff restrita aos espaços compactos T_1", que consta no resumo de nosso artigo na MU42. Esses colegas comentaram, essencialmente, que "algo desse tipo já estava demonstrado na tese de doutorado do Prof. Edison Farah (professor catedrático, USP, 1915-2006)".

De fato, na tese de doutorado do Prof. Edison Farah (defendida em 1954 e reeditada em 1994 pela Editora da UFPR, intitulada "Algumas proposições equivalentes ao Axioma da Escolha") encontra-se, claramente, o argumento de adicionar-se, para cada conjunto em uma família indexada de conjuntos não-vazios, um determinado ponto não-pertencente à união dessa família e trabalhar com topologias (definidas em cada um dos fatores) nas quais o unitário desse ponto adicionado fosse sempre um aberto-fechado. No entanto, pela própria prática dos anos 50, essa demonstração foi feita *supondo que todos os espaços eram compactos* T_2. Por exemplo, nos livros de *Bourbaki*, a noção de "espaço compacto" coincide com o que atualmente chamamos de espaço compacto Hausdorff (ou T_2). Não havia, portanto, uma preocupação em, eventualmente, trabalhar com topologias compactas T_1. Além disso, a passagem na qual utilizamos o argumento de que "podemos sempre fazer um número *finito* de escolhas arbitrárias" (quando se verifica que uma determinada família de fechados num produto tem a propriedade de intersecção finita) está mais clara e detalhada em nosso artigo, até mesmo pelo fato de tratar-se de um artigo de divulgação científica e não de uma tese de doutorado. Assim, acreditamos que a frase que consta em nosso resumo está justificada.

Porém, mais importante do que todos esses pequenos detalhes é destacar o trabalho do Prof. Edison Farah, que talvez não tenha divulgado adequadamente muitos de seus resultados; vamos aproveitar a oportunidade para divulgar alguns deles. Por exemplo, na tese de doutorado já citada o Prof. Farah deu duas contribuições originais e dignas de nota. A primeira é que o Axioma da Escolha (**AC**) é equivalente à distributividade generalizada da intersecção em relação à união; mais precisamente, **AC** é equivalente à seguinte asserção:

Dada uma família qualquer $\{\{Y_{s,i} : i \in I_s\} : s \in S\}$ *de famílias de conjuntos, com o produto* $I = \prod_{s\in S} I_s$ *não-vazio, tem-se*

$$\bigcap_{s\in S}\Big(\bigcup_{i\in I_s} Y_{s,i}\Big) = \bigcup_{\sigma\in I}\Big(\bigcap_{s\in S} Y_{s,\sigma(s)}\Big).$$

A segunda contribuição original da tese do Prof. Farah que gostaríamos de destacar é a seguinte: foi apresentado um certo "Axioma das Topologias" (seguindo a terminologia utilizada no informativo prefácio do Prof. Newton da Costa para a edição de 1994, da Editora da UFPR). O Axioma das Topologias corresponde à seguinte asserção:

Dada uma família de conjuntos não-vazios $\{X_i : i \in I\}$*, existe uma família de topologias* $\{\tau_i : i \in I\}$ *tal que, para cada* $i \in I$*,* τ_i *é uma topologia compacta* T_2 *sobre* X_i*.*

Edison Farah observou que a conjunção do Axioma das Topologias com o Teorema dos Ultrafiltros (que é equivalente ao chamado Teorema do Ideal Booleano Primo, **BPI**) é equivalente ao Axioma da Escolha (veja os comentários em nosso artigo na MU42 sobre a equivalência entre **BPI** e a restrição do Teorema de Tychonoff (**TT**) aos espaços compactos T_2). No entanto, apenas entre o final dos anos 60 e o início dos anos 70 verificou-se que **BPI** é estritamente mais fraco do que **AC** (novamente, indicamos o nosso artigo na MU 42 para mais detalhes e referências aos trabalhos originais). Assim, de certo modo, podemos pensar que o Axioma das Topologias é exatamente "uma medida de quanto **BPI** é mais fraco do que **AC**". Conforme o Prof. Newton da Costa comentou no prefácio da citada edição de 1994, a questão natural que se apresenta – se o Axioma das Topologias é mais fraco do que **AC** ou não – ainda é um problema aberto para a teoria dos conjuntos.

Também vale destacar o trabalho de uma das alunas de Edison Farah, a Profa. Ofélia Teresa Alas (atualmente professora titular aposentada da USP, mas ainda pesquisadora ativa em Topologia Geral e Teoria dos Conjuntos). Ainda no início de sua carreira, em 1969, ela demonstrou que a seguinte asserção é equivalente ao Axioma da Escolha:

Seja $\{(X_i, \tau_i) : i \in I\}$ *uma família de espaços topológicos dois a dois homeomorfos e tais que, para cada* i *em* I*, a topologia* τ_i *possui exatamente três elementos. Então, o produto (de Tychonoff)* $\prod_{i\in I} X_i$ *é compacto.*

Trata-se, até o momento, da versão mais restrita do Teorema de Tychonoff que ainda é equivalente ao Axioma da Escolha.

Na célebre obra de referência de H. Rubin e J. Rubin (*Equivalents of the Axiom of Choice, II, North-Holland, 1985*), o resultado de Farah sobre distributividade generalizada da intersecção com relação à união consta como sendo a equivalência "**AC18**", e o resultado de Alas sobre produtos topológicos consta como sendo a equivalência "**TOP3**".

Samuel Gomes da Silva
João Paulo Cirineu de Jesus
30.mar.2009