Editores responsáveis:
Carlos Gustavo Moreira (IMPA)
Nicolau Corção Saldanha (PUC-Rio)

A IMC (International Mathematical Competition for University Students) é uma competição internacional universitária, realizada desde 1994, da qual participam equipes de universidades e equipes nacionais. O Brasil tem participado desde 2003 e a participação dos alunos é financiada por suas universidades. A Olimpíada Brasileira de Matemática envia um ou dois professores para liderar os participantes brasileiros e recomenda às universidades com alunos premiados no nível universitário da OBM que apoiem sua participação na IMC. Os seguintes alunos brasileiros obtiveram primeiros prêmios (que correspondem a medalhas de ouro) na IMC até 2008: Yuri Gomes Lima - UFC (2004), Alex Corrêa Abreu - UFRJ (Grand First Prize, 2005), Thiago Barros Rodrigues Costa - Unicamp (2005 e 2006), Humberto Silva Naves - ITA (2006) e Fabio Dias Moreira - PUC-Rio (2005, 2006, 2007 e 2008). Para este número fizemos a seguinte seleção de problemas das últimas edições da IMC. Visite a página *www.imc-math.org* para mais informações sobre a competição.

1. (IMC 2003, dia 2, problema 4) Encontre todos os inteiros positivos n para os quais existe uma família $\mathcal{F}$ de subconjuntos de três elementos de $S = \{1, 2, ..., n\}$ satisfazendo as duas seguintes condições:

(i) dados dois elementos distintos $a, b \in S$ existe um único $A \in \mathcal{F}$ contendo tanto a quanto b;

(ii) se a, b, c, x, y, z são elementos de S tais que $\{a, b, x\}, \{a, c, y\}, \{b, c, z\} \in \mathcal{F}$ então $\{x, y, z\} \in \mathcal{F}$.

2. (IMC 2003, dia 2, problema 5) (a) Mostre que para cada função $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ existe uma função $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \leq g(x) + g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$.
(b) Encontre uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ para a qual não existe função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x, y) \leq g(x) + g(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

3. (IMC 2004, dia 2, problema 2) Sejam $f, g : [a, b] \to [0, 1)$ funções contínuas e não decrescentes tais que

$$\int_a^b \sqrt{f(t)}\, dt = \int_a^b \sqrt{g(t)}\, dt$$

e

$$\int_a^x \sqrt{f(t)}\, dt \leq \int_a^x \sqrt{g(t)}\, dt\,,$$

para todo $x \in [a, b]$. Prove que

$$\int_a^b \sqrt{1 + f(t)} dt \geq \int_a^b \sqrt{1 + g(t)} dt\,.$$

4. (IMC 2005, dia 1, problema 6) Dado um grupo G, seja $G(m)$ o subgrupo gerado pelas m-ésimas potências de elementos de G. Se $G(m)$ e $G(n)$ são comutativos, prove que $G(\mathrm{mdc}(m, n))$ também é comutativo ($\mathrm{mdc}(m, n)$ denota o máximo divisor comum de m e n).

5. (IMC 2005, dia 2, problema 3) No espaço vetorial de todas as matrizes reais $n \times n$, encontre a maior dimensão possível de um subespaço V tal que $\text{traço}(XY) = 0$ para quaisquer $X, Y \in V$ (o traço de uma matriz é a soma das entradas na diagonal principal).

6. (IMC 2006, dia 1, problema 6) Encontre todas as sequências $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de números reais em que $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$ para as quais a seguinte afirmação é verdadeira: Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função n vezes diferenciável e $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ são números reais tais que $f(x_0) = f(x_1) = \cdots = f(x_n) = 0$ então existe $h \in (x_0, x_n)$ para o qual $a_0 f(h) + a_1 f'(h) + \cdots + a_n f^{(n)}(h) = 0$.

7. (IMC 2006, dia 2, problema 4) Seja v_0 o vetor nulo em $\mathbb{R}^n$ e sejam $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ tais que a norma euclidiana $|v_i - v_j|$ é racional para quaisquer $0 \leq i, j \leq n + 1$. Prove que $v_1, \ldots, v_{n+1}$ são linearmente dependentes sobre os racionais.

8. (IMC 2007, dia 2, problema 6) Seja f um polinômio não nulo com coeficientes reais. Defina a sequência $f_0, f_1, f_2, \ldots$ de polinômios por $f_0 = f$ e $f_{n+1} = f_n + f_n'$ para todo $n \geq 0$. Prove que existe um número N tal que para todo $n \geq N$ todas as raízes de f_n são reais.

9. (IMC 2008, dia 1, problema 5) Existe algum grupo finito G com um subgrupo normal H tal que $|\operatorname{Aut} H| > |\operatorname{Aut} G|$?

Resposta do leitor A. L. Pereira, SP, ao problema 2 da MU43: "Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma função tal que $\|p-q\| = 1$ implica $\|f(p) - f(q)\| = 1$, onde $\|p\|$ denota a norma euclidiana de p. Prove que f é uma isometria, isto é, que $\|f(p) - f(q)\| = \|p-q\|$ para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^3$."

Solução. Sejam $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ os vértices de um triângulo equilátero de lado 1. Existem exatamente 2 pontos V, W em $\mathbb{R}^3$ tais que A, B, C, V e A, B, C, W são vértices de um tetraedo regular, sendo um deles dados por reflexão do outro em relação ao plano determinado por A, B e C. Um cálculo simples mostra que $\|V - W\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Denotaremos frequentemente, no que segue, a imagem $f(X)$ de um ponto $X \in R^3$ por X'. Das hipóteses sobre f decorre que A', B', C', V' e A', B', C', W', são tetraedros regulares de lado 1 com mesma base A', B', C'. Como só existem dois tais tetraedros devemos ter que $V' = W'$ ou W' é dado pela reflexão de V' em relação ao plano determinado por A', B' e C'. No primeiro caso, teremos $\|V' - W'\| = 0$ e, no segundo, $\|V' - W'\| = \|V - W\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Observemos agora que, dados dois pontos V e W em $\mathbb{R}^3$, com $||V - W|| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, então eles são os vértices de tetraedros regulares de lado 1 e mesma base A, B, C, como acima. Segue que (com a mesma notação de acima) $\|V' - W'\| = 0$, ou $\|V' - W'\| = \|V - W\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Mostremos agora que o primeiro caso não pode ocorrer. Para isto, escolhemos $Z \in \mathbb{R}^3$ tal que $\|V - Z\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ e $\|W - Z\| = 1$. Se $\|V' - W'\| = 0$, seguiria que $1 = \|W - Z\| = \|W' - Z'\| = \|V' - Z'\|$. Mas $\|V' - Z'\| = 0$ ou $\|V' - Z'\| = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, uma contradição em qualquer caso.

Sejam agora $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ os vértices de um triângulo equilátero de lado $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Novamente, existem exatamente 2 pontos V, W em $\mathbb{R}^3$ tais que A, B, C, V e A, B, C, W são vértices de um tetraedro de base A, B, C e demais arestas de comprimento 1. Novamente, um cálculo simples mostra agora que $\|V - W\| = \frac{2}{3}$ e, por argumentos inteiramente similares aos de acima, $\|V' - W'\| = \frac{2}{3}$, sempre que $\|V - W\| = \frac{2}{3}$.

Podemos agora refazer todo o argumento acima, substituindo 1 por $a_0 = \frac{2}{3}$ ou $b_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, e assim sucessivamente, para obter duas sequências $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ e $b_n = \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^n \to \infty$, tais que $\|X - Y\| = a_n$, (resp b_n), implica $\|f(X) - f(Y)\| = a_n$ (resp b_n).

Agora, se $\|X - Y\| \leq 2 \cdot a_n$, então existe um ponto $Z \in \mathbb{R}^3$, tal que $\|X - Z\| = \|Y - Z\| = a_n$. Segue que $\|X' - Z'\| = \|Y' - Z'\| = a_n$. Da desigualdade triangular, obtemos $\|X' - Y'\| \leq 2 \cdot a_n$. Desse fato segue facilmente que f é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^3$.

Observemos que, para todo $n \geq 1$, $b_{2n} = 4^n \left(\frac{2}{3}\right)^n = 4^n a_n$. Seja X um ponto qualquer em $\mathbb{R}^n$ e fixemos uma semi-reta α com origem em X. O segmento L contido em α com origem em X e comprimento b_{2n} pode, então, ser particionado em $m = 4^n$ segmentos de comprimento a_n, ou seja, existem $X = X_0 < X_1 < X_2 < \cdots < X_m$ em L, com a ordem dada pela semireta α, e tais que $\|X_k - X_{k-1}\| = a_n$, para todo $1 \leq k \leq m$. Observemos ainda que, dados $0 \leq k_1 < k_2 \leq m$, temos

$$\begin{aligned}
\|f(X_{k_2}) - f(X_{k_1})\| &\leq \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \|f(X_j) - f(X_{j-1})\| \\
&= \sum_{j=k_1+1}^{k_2} \|X_j - X_{j-1}\| \\
&= \|X_{k_2} - X_{k_1}\|
\end{aligned}$$

Segue que, para $0 \leq k \leq m$,

$$\begin{aligned}
&\|X_m - X_k\| + \|X_k - X\| \\
&= \|X_m - X\| \\
&= \|f(X_m) - f(X)\| \\
&\leq \|f(X_m) - f(X_k)\| + \|f(X_k) - f(X)\| \\
&\leq \|X_m - X_k\| + \|f(X_k) - f(X)\|
\end{aligned}$$

e obtemos $\|f(X_k) - f(X)\| \geq \|X_k - X\|$. Mas, como $\|f(X_k) - f(X)\| \leq \|X_k - X\|$, concluímos que $\|f(X_k) - f(X)\| = \|X_k - X\|$. Como o comprimento dos subintervalos $[X_k - X_{k-1}] = a_n \to 0$ quando $n \to \infty$ e f é uniformemente contínua, segue facilmente que $\|f(Y) - f(X)\| = \|Y - X\|$ para todo Y na semireta α. Sendo esta arbitrária, concluímos que o mesmo vale para todo par $X, Y \in \mathbb{R}^3$.