

COEFICIENTES ALEATÓRIOS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS LINEARES

Bernardo Kulnig Pagnoncelli (Univ. Adolfo Ibañez)

Hélio Lopes (PUC-Rio)

Carlos Frederico Borges Palmeira (PUC-Rio)

em que

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Neste artigo estudamos sistemas lineares de equações diferenciais no plano. Ao invés de considerar uma matriz A fixa, 2×2 , assumimos que suas entradas são variáveis aleatórias e nos perguntamos sobre a probabilidade de que a origem seja cada um dos tipos de ponto fixo, por exemplo sela, nó etc. Esse problema, sugerido por Steven Strogatz em seu livro ([10]), será considerado não apenas do ponto de vista teórico, mas também do computacional. Recorreremos à simulação seja para confirmar um resultado obtido seja para aproximar a solução do problema.

Fenômenos envolvendo evolução contínua no tempo são frequentemente modelados por equações diferenciais. Os modelos mais simples são construídos usando-se equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, que podem ser facilmente reduzidas a sistemas de equações diferenciais de primeira ordem. Os exemplos vão desde um simples oscilador harmônico ([10]) até um modelo de oligopólio, em que um número de firmas compete pelo mercado ([7], [9]).

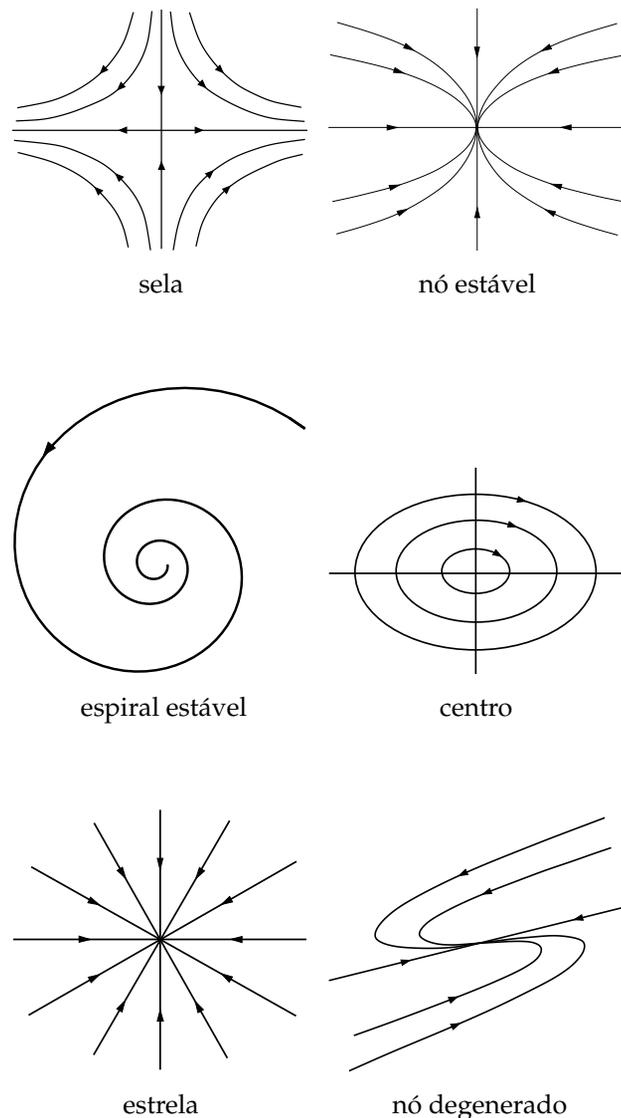
Precisamente, vamos considerar sistemas bidimensionais homogêneos de primeira ordem com coeficientes constantes a, b, c, d :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by, \\ \dot{y} &= cx + dy, \end{aligned}$$

em que $x = x(t)$, $y = y(t)$, t é a variável independente e o ponto sobre os símbolos denota derivada. Matricialmente, temos

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}, \quad (1)$$

Figura 1:



Observe que $(0, 0)$ é sempre um ponto fixo de (1). Em cursos básicos de equações diferenciais estudam-se as possíveis configurações do espaço de fase associadas a esse sistema. Diferentes situações ocorrem de acordo com os sinais do traço τ de A , do determinante Δ de A e de $\tau^2 - 4\Delta$. Essas situações estão ilustradas na figura 1. Dizemos que um ponto fixo é uma *sela* se $\Delta < 0$. Se $\Delta > 0$, $\tau^2 - 4\Delta > 0$ e $\tau < 0$ (respectivamente $\tau > 0$) temos um *nó estável* (respectivamente *nó instável*). Se $\Delta > 0$, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau < 0$ (respectivamente $\tau > 0$) temos uma *espiral estável* (respectivamente *espiral instável*). Se $\Delta > 0$, $\tau^2 - 4\Delta < 0$ e $\tau = 0$ temos um *centro*. Finalmente, existem os casos de fronteira: Se $\tau^2 - 4\Delta = 0$ e $\Delta \neq 0$ temos um *nó degenerado* ou uma *estrela*, dependendo do número de autovetores (1 ou 2) associados ao autovalor de A . Estrelas e nós degenerados também podem ser estáveis ($\tau < 0$) ou instáveis ($\tau > 0$). Se $\Delta = 0$, então temos pontos fixos não isolados.

Matrizes aleatórias

A proposta desse artigo é considerar a matriz A da equação (1) com entradas aleatórias. Dizemos que A é uma *matriz aleatória* se suas entradas são variáveis aleatórias (v.a.'s) com uma dada distribuição. Queremos responder ao seguinte tipo de pergunta: escolhido um sistema linear aleatoriamente, qual é a probabilidade de que a origem seja, digamos, uma espiral estável?

Considere a matriz A que descreve o sistema (1) com entradas X_1, X_2, X_3 e X_4 , em que cada entrada é uma v.a.:

$$A = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Ao longo de todo o artigo vamos supor que as v.a.'s são independentes e identicamente distribuídas (i.i.d.). Escolher um sistema linear aleatoriamente significa que sorteamos independentemente valores para as v.a.'s X_i , $i = 1, \dots, 4$. Denotando por letras minúsculas os sorteios ou saídas das v.a.'s, temos a matriz

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

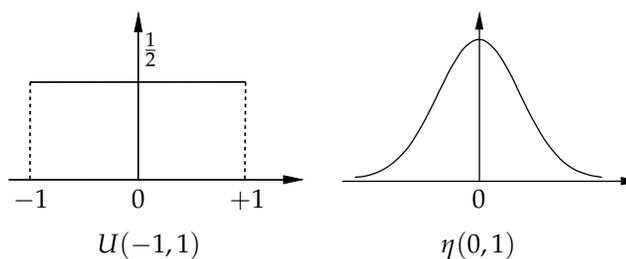
que pode ser classificada analisando-se seu traço e determinante. Note que se as variáveis aleatórias em (2)

possuem *função de distribuição acumulada* ([6]) contínua então alguns tipos de ponto fixo têm probabilidade zero de ocorrer. Isso ocorre porque a hipótese de continuidade elimina a presença de átomos, ou seja, de pontos com probabilidade não nula. Como consequência,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((0, 0) \text{ ser um centro}) &= \mathbb{P}(\Delta > 0, \tau^2 - 4\Delta < 0, \tau = 0) \\ &\leq \mathbb{P}(\tau = 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O mesmo vale para os nós degenerados e as estrelas, que possuem a condição de igualdade $\tau^2 = 4\Delta$ em sua definição.

Figura 2:



As variáveis aleatórias normal e uniforme

Vamos focar em duas possibilidades de v.a.: uniformemente distribuída no intervalo $[-1, 1]$, denotada por $U[-1, 1]$, e normal (ou gaussiana) com média 0 e variância 1, denotada por $\eta(0, 1)$. Em ambos os casos temos v.a.'s simétricas, isto é, com $\mathbb{P}(X < 0) = \mathbb{P}(X > 0)$. Essa escolha visa a não privilegiar nenhum tipo de ponto fixo. Se tivéssemos escolhido a distribuição uniforme em $[0, 1]$, o traço de (2) seria sempre positivo e teríamos, por exemplo, probabilidade nula de que a origem seja uma espiral estável.

A v.a. $U[-1, 1]$ tem função densidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e a densidade de $\eta(0, 1)$ é

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Os gráficos dessas funções estão na figura 2.

A matriz aleatória com entradas normais $\eta(0, 1)$ aparece com frequência na literatura. Não é por acaso: a v.a. $\eta(0, 1)$ possui propriedades interessantes que a fazem uma escolha natural. Para entender uma importante propriedade geométrica de variáveis aleatórias normais, note que os sinais do traço τ , do determinante Δ e de $\tau^2 - 4\Delta$ são invariantes sob multiplicações por escalares positivos. Assim, perguntar se uma matriz A , 2×2 , é uma espiral estável é o mesmo que perguntar se $200A$ é uma espiral estável. O comportamento dinâmico para os dois casos é o mesmo.

Usando essa invariância podemos dar uma interpretação geométrica interessante para o problema proposto neste artigo. Normalizando as matrizes de maneira que elas tenham norma 1, podemos pensar que estamos calculando probabilidades em $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ ao invés de \mathbb{R}^4 .¹ Ou seja, uma vez definida a densidade de probabilidade em \mathbb{R}^4 , estamos interessados em estudar a restrição dessa densidade à esfera S^3 .

A invariância por multiplicação nos diz que as regiões de \mathbb{R}^4 que correspondem a cada um dos tipos de ponto fixo são cones: por exemplo, se (x_0, y_0, w_0, z_0) representa uma matriz que é um nó estável, então a projeção desse ponto em S^3 representa toda a semirreta $\{\alpha(x_0, y_0, w_0, z_0); \alpha \in \mathbb{R}^+\}$. Surge uma pergunta natural: qual é a distribuição de probabilidade na esfera? A resposta é simples: é uniforme, pois para $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3$ temos

$$\begin{aligned} g(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(x_1)f(x_2)f(x_3)f(x_4) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} e^{-\frac{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)}{2}} \\ &= K, \end{aligned}$$

em que K é uma constante, igual a $\frac{e^{-1/2}}{(2\pi)^2}$, pois (x_1, x_2, x_3, x_4) pertence a S^3 , e $g(x_1, x_2, x_3, x_4)$ é a densidade conjunta de X_i , $i = 1, \dots, 4$. Esse resultado obviamente é válido para esferas de qualquer raio, exceto pelo valor da constante K .

Mostramos que a distribuição conjunta de normais

¹ Observe que se tivéssemos permitido multiplicações por escalares quaisquer (não nulos), e não apenas escalares positivos, estaríamos considerando o espaço projetivo real \mathbb{P}^3 .

independentes em \mathbb{R}^4 implica numa distribuição uniforme em S^3 . E a recíproca? Que funções densidade marginais² devemos considerar para que tenhamos uma densidade marginal conjunta constante em esferas? Por simplicidade, vamos fazer as contas para duas dimensões. Queremos encontrar $f_1(x)$ e $f_2(y)$ tais que

$$f_{X,Y}(x, y) = f_1(x)f_2(y) = h(x^2 + y^2),$$

em que $f_{X,Y}(x, y)$ é uma densidade conjunta bidimensional e $f_1(x)$ e $f_2(y)$ são densidades unidimensionais.

Assumindo que f_1 , f_2 e h possuem pelo menos uma derivada, temos

$$f_1'(x)f_2(y) = 2xh'(x^2 + y^2)$$

e

$$f_1(x)f_2'(y) = 2yh'(x^2 + y^2).$$

Igualando as duas equações e assumindo x e y diferentes de zero obtemos

$$\frac{f_1'(x)}{xf_1(x)} = \frac{f_2'(y)}{yf_2(y)} = \lambda,$$

em que λ é uma constante arbitrária porque cada termo depende unicamente de uma das variáveis. Resolvendo a equação diferencial obtemos expressões para as densidades marginais unidimensionais:

$$f_1(x) = C_1 e^{\frac{\lambda x^2}{2}}$$

e

$$f_2(y) = C_2 e^{\frac{\lambda y^2}{2}}.$$

Essas densidades são normais com média zero e variâncias dependendo de λ . Assim, se quisermos uma densidade conjunta constante em esferas (dentro das hipóteses de diferenciabilidade acima) é necessário escolher v.a.'s normais unidimensionais para cada direção, com o mesmo desvio-padrão.

² Se um vetor bidimensional aleatório (X, Y) tem densidade $f(x, y)$, então as v.a.'s X e Y têm densidades marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$, definidas por $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy$ e $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx$.

Procurando por soluções

Para um dos pontos fixos, a *sela*, é possível calcular explicitamente a probabilidade de ocorrência. Neste caso, usaremos apenas que

$$\mathbb{P}(X_i > 0) = \mathbb{P}(X_i < 0) = 1/2, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (3)$$

As duas variáveis aleatórias que estamos considerando nesse texto, $\eta(0, 1)$ e $U[-1, 1]$, satisfazem a condição (3).

Como a origem é uma sela se o determinante de A for negativo, então

$$\begin{aligned} \mathbb{P}((0, 0) \text{ ser uma sela}) &= \mathbb{P}(\Delta < 0) \\ &= \mathbb{P}(X_1 X_4 - X_2 X_3 < 0) \\ &= \mathbb{P}(Y_1 < Y_2), \end{aligned}$$

em que $Y_1 = X_1 X_4$ e $Y_2 = X_2 X_3$. Por construção, Y_1 e Y_2 são independentes e identicamente distribuídas. Além disso, elas herdam a propriedade descrita em (3):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 > 0) &= \\ &= \mathbb{P}(X_1 > 0, X_4 > 0) + \mathbb{P}(X_1 < 0, X_4 < 0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Note que na segunda igualdade usamos que $X_i, i = 1, \dots, 4$ são independentes. Os cálculos em (4) implicam que $\mathbb{P}(Y_1 < 0) = 1/2$ por complementaridade. Observe que o mesmo vale para Y_2 , e com isso nosso problema agora se reduz a calcular $\mathbb{P}(Y_1 < Y_2)$. O espaço de possíveis realizações do vetor aleatório (Y_1, Y_2) é o \mathbb{R}^2 .

Portanto queremos saber qual é a probabilidade de que o par (Y_1, Y_2) pertença ao conjunto $T = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 < y_2\}$. Usando-se que no primeiro e terceiro quadrantes apenas a metade da área deve ser levada em consideração, por causa da simetria de Y_1 e Y_2 , segue que a probabilidade de que a origem seja uma sela é

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_1 < Y_2) &= \mathbb{P}((Y_1, Y_2) \in T) \\ &= \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_1 > 0, Y_2 > 0) + \mathbb{P}(Y_1 > 0, Y_2 < 0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \mathbb{P}(Y_1 < 0, Y_2 < 0) \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Agora analisemos a *espiral instável*. Vimos acima que a origem é uma espiral instável se $\tau > 0, \Delta > 0$ e $\tau^2 - 4\Delta < 0$. Portanto, definindo o conjunto

$$D = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_4 > 0, x_1 x_4 - x_2 x_3 > 0, (x_1 + x_4)^2 - 4(x_1 x_4 - x_2 x_3) < 0\},$$

a probabilidade de que $(0, 0)$ seja uma espiral instável é

$$\iiint_D f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) f_{X_4}(x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \quad (5)$$

em que $f_{X_i}(x_i)$ são as densidades das v.a.'s independentes $X_i, i = 1, \dots, 4$, e

$$f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) f_{X_3}(x_3) f_{X_4}(x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

é a densidade conjunta de X_1, X_2, X_3, X_4 .

A integral em (5) não é simples de se resolver porque não é fácil explicitar seus limites de integração. De fato, em cursos de cálculo, integrais múltiplas são calculadas usando-se o teorema de Fubini, que as converte em integrais iteradas. Sejam $g(x)$ e $h(x)$ funções de uma variável tais que para todo x tem-se $g(x) < h(x)$, e R a região delimitada pelas retas $x = a, x = b$ e pelos gráficos $y = g(x)$ e $y = h(x)$. Suponha que queiramos calcular a integral dupla de uma função $f(x, y)$ in R :

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dx dy.$$

No caso geral, o que usualmente se faz é dividir a região ou fazer uma troca de variáveis que caia nesse caso. Infelizmente, esse procedimento é limitado. Se as funções g e h fossem de duas variáveis, uma região definida por $g(x, y) < 0$ e $h(x, y) < 0$ com $g(x, y)$ e $h(x, y)$ polinômios de grau 2, pode dar origem a uma integral não tratável. Outro exemplo complicado seria uma região definida apenas por $g(x, y) < 0$ com $g(x, y)$ polinômio de grau 5. Por essa razão, métodos numéricos são frequentemente empregados para se aproximar o valor dessas integrais.

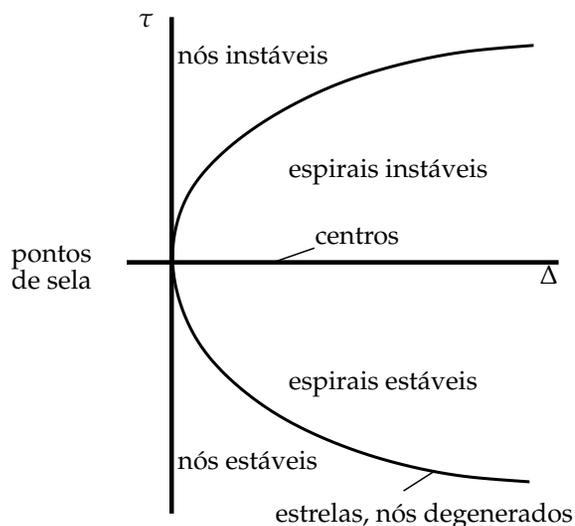
Antes de iniciarmos a próxima seção, gostaríamos de fazer um alerta: é tentador resolver o problema no caso da distribuição $U[-1, 1]$ simplesmente calculando-se as áreas correspondentes a cada um dos tipos de pontos fixo no chamado *diagrama de estabilidade*, esquematizado na figura 3.

Note que o retângulo $[-2, 2] \times [-2, 2]$ representa todas as possíveis traços e determinantes obtidos sorteando-se aleatoriamente as entradas da matriz A no suporte da distribuição $U[-1, 1]$. Com a exceção da sela, os quocientes de cada uma das áreas da Figura 3 dividido pela área do retângulo não corresponde à probabilidade de se obter o respectivo ponto fixo. Isso ocorre porque os eixos da Figura 3 são τ e Δ e *elas não são v.a.'s uniformes em $[-1, 1]$* . Vamos analisar o traço: ele é a soma $X_1 + X_4$ de duas $U[-1, 1]$. Qual é a sua função distribuição? A resposta é

$$\mathbb{P}(\tau \leq x) = \begin{cases} \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 & \text{se } -2 < x < 0, \\ 2\left(\frac{x+2}{2}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Uma referência que ajuda a encontrar esta expressão é [5]. Para obter a fórmula geral da função distribuição da soma de n variáveis aleatórias uniformes independentes sugerimos [2]³.

Figura 3:



O Método de Monte-Carlo

O Método de Monte-Carlo é uma ferramenta largamente utilizada para se obter aproximações de integrais cuja solução explícita é difícil ou impossível. No nosso caso, ele consiste em gerar números aleatórios de acordo com uma dada distribuição e computar a fração

³Disponível em <http://cg.scs.carleton.ca/~luc/rnbookindex.html>.

deles que satisfazem a uma certa propriedade. Uma excelente referência é o livro [8], onde o autor apresenta de maneira bastante elementar as ferramentas do método, seguido de inúmeros exemplos.

No contexto do presente problema, vamos usar Monte-Carlo para aproximar as probabilidades de $(0, 0)$ ser cada um dos tipos de ponto fixo. A implementação é simples e pode ser feita seguindo os passos a seguir:

PASSO 0: Inicialize as variáveis sela, nó instável, nó estável, espiral instável e espiral estável como 0 e defina variáveis tau para traço, Delta para determinante e tauDelta para $\tau^2 - 4\Delta$.

PASSO 1: Gere x_1, x_2, x_3, x_4 com distribuição $U[-1, 1]$ ou $\eta(0, 1)$.

PASSO 2: Faça tau = $x_1 + x_4$, Delta = $x_1x_4 - x_2x_3$ e tauDelta = $\tau^2 - 4\Delta$.

PASSO 3: Se Delta < 0 faça sela = sela + 1 e volte ao PASSO 1.

PASSO 4: Se tauDelta > 0 e tau > 0 (respectivamente tau < 0), faça nó instável = nó instável + 1 (respectivamente nó estável = nó estável + 1) e retorne ao PASSO 1.

PASSO 5: Se tau > 0 (respectivamente tau < 0) faça espiral instável = espiral instável + 1 (respectivamente espiral estável = espiral estável + 1) e volte ao PASSO 1.

A estimativa da probabilidade para cada um dos casos é obtida dividindo o valor de cada uma das variáveis que representam pontos fixos pelo número n de simulações. Rodamos o programa para vários valores de n e para as duas distribuições que estamos considerando. Inicialmente fizemos 100.000 iterações Monte-Carlo para cada distribuição em um Pentium 4 com 2.00GHz. Cada iteração consiste em gerar 4 números aleatórios que formam uma realização da matriz aleatória A . Os resultados estão na Tabela 1. O tempo de execução foi de menos de um segundo em ambos os casos.

Para 1 milhão de iterações obtivemos os resultados descritos na Tabela 2. O tempo de execução foi de aproximadamente 1 segundo para a $U[-1, 1]$ e 3 segundos para $\eta(0, 1)$. A razão dessa diferença é que é mais custoso computacionalmente gerar distribuições normais do que uniformes. Note que a probabilidade estimada de se obter uma sela é bem próximo do valor exato $1/2$, obtido analiticamente.

	$U[-1, 1]$	$\eta(0, 1)$
sela	0.50105	0.49931
nó estável	0.08881	0.10351
nó instável	0.08929	0.10351
espiral estável	0.15916	0.14563
espiral instável	0.16169	0.14819

Tabela 1: Simulação de Monte-Carlo para 100.000 iterações.

	$U[-1, 1]$	$\eta(0, 1)$
sela	0.50036	0.49961
nó estável	0.09054	0.10347
nó instável	0.09036	0.10336
espiral estável	0.15963	0.14656
espiral instável	0.15910	0.14699

Tabela 2: Simulação Monte-Carlo para 1 milhão de iterações.

Por fim, fizemos uma simulação um pouco diferente para $\eta(0, 1)$, restringindo-nos ao caso da espiral estável. Ao invés de rodar um número pré-especificado de iterações, rodamos o programa até que o desvio-padrão amostral do estimador de Monte-Carlo fosse menor que uma tolerância pré-especificada d . O desvio-padrão é uma medida de dispersão, portanto, quanto menor o valor de d mais experimentos precisam ser feitos para que se atinja a precisão desejada. Os resultados estão na Tabela 3. O valor aproximado da probabilidade da origem ser espiral estável para $d = 0.0001$ é 0.14635.

d	número de simulações
1	100
0.1	100
0.01	1156
0.001	124187
0.0001	12499179

Tabela 3: Simulação para a espiral estável. Número de iterações necessárias para reduzir o desvio-padrão amostral a um valor fixado d .

Conclusão

Matrizes aleatórias surgem em diferentes contextos. Com o poder computacional de que dispomos hoje em dia, é irresistível usar simulação para obter aproximações e evidências empíricas da solução de problemas envolvendo essas matrizes. Além do problema considerado neste artigo, existem diversas questões intrigantes relacionadas a matrizes aleatórias: dada uma matriz aleatória A , $n \times n$, com entradas $\eta(0, 1)$ i.i.d., qual é a probabilidade de exatamente k autovalores serem reais? Qual é o número esperado de autovalores reais? Após normalizados para que pertençam ao intervalo $[-1, 1]$, qual é a distribuição dos autovalores de A ?

Um resultado conhecido é que, se as entradas de uma matriz A , $n \times n$, são $\eta(0, 1)$ i.i.d, a probabilidade de que todos os autovalores de A sejam reais é $1/2^{n(n-1)/4}$ (ver [4]). Usando esse resultado poderíamos ter obtido diretamente a solução exata para o problema deste artigo! Para $n = 2$, essa probabilidade é $1/\sqrt{2}$, ou aproximadamente 0.70710. Isso implica que a probabilidade de se obter uma espiral estável ou instável é *exatamente* $(1 - 1/\sqrt{2})/2$, ou aproximadamente 0.14644.

Como mostramos que a probabilidade de se obter uma sela é 0.5, temos que a probabilidade de se obter um nó estável ou instável é *exatamente* $(1/\sqrt{2} - 0.5)/2$, ou aproximadamente 0.10355. Se olharmos para a simulação no caso $n = 1.000.000$ (Tabela 1) podemos ver que o Método de Monte-Carlo nos dá uma excelente aproximação para a resposta: 0.49961 para a sela, 0.14656 para a espiral estável e 0.10351 para o nó está-

vel.

O leitor interessado nas respostas das perguntas feitas no início dessa seção e em outras propriedades de matrizes aleatórias deve consultar [4]. Outras áreas onde aparecem matrizes aleatórias são teoria dos números (para uma conexão com a Hipótese de Riemann, veja [1]), análise numérica (cálculo do *condition number* de uma matriz aleatória [3]) e estatística multivariada (teste de hipótese, análise de componente principal etc.).

Agradecimentos. Bernardo K. Pagnoncelli agradece a Funenseg pelo suporte financeiro. Hélio Lopes agradece o apoio da FAPERJ, CNPq e FINEP. Os autores agradecem a Beatriz Gonçalves Ferreira e aos editores pela leitura atenta do texto, pelos comentários e sugestões pertinentes e a Carlos Tomei pelas discussões e sugestões que certamente enriqueceram este artigo.

Referências

- [1] CONREY, J. B. The Riemann Hypothesis. *Notices of the American Mathematical Society*, v. 50, n. 3, p. 341–353, 2003.
- [2] DEVROYE, L. *Non-uniform random variate generation*. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [3] EDELMAN, A. On the distribution of a scaled condition number. *Mathematics of Computation*, v. 58, n. 197, p. 185–190, 1992.
- [4] EDELMAN, A. The probability that a random matrix has k real eigenvalues, related distributions, and the circular law. *Journal of Multivariate Analysis*, v. 60, n. 2, p. 203–232, 1997.
- [5] HOEL, P. G.; PORT, S. C.; STONE, C. J. *Introduction to probability theory*. Boston: Houghton Mifflin Company, 1971. (The Houghton Mifflin Series in Statistics)
- [6] JAMES, B. *Probabilidade: um curso em nível intermediário*. 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Projeto Euclides)

- [7] PAGNONCELLI, B. K.; SCHNOOR, M. A. K.; PALMEIRA, C. F. B.; CAYRES, R. Cournot equilibrium: modern techniques applied to an old problem. *Journal of Interdisciplinary Mathematics*, v. 11, n.5, p. 601–616, 2008.
- [8] ROSS, S. M. *Simulation*. 3.ed. San Diego: Academic Press, 2002.
- [9] SHONE, R. *Economic dynamics: phase diagrams and their economic application*. 2.ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [10] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Reading: Addison-Wesley, 1994. (Studies in Nonlinearity)

Bernardo K. Pagnoncelli
Universidad Adolfo Ibañez, Santiago, Chile
bernardo.pagnoncelli@uai.cl

Hélio Lopes – PUC-Rio
lopes@mat.puc-rio.br

Carlos Frederico Borges Palmeira – PUC-Rio
fredpalm@puc-rio.br