Uma carta de Dieudonné

Para inaugurar esta seção, trazemos uma carta de Dieudonné a Paulo Ribenboim, de 1972, em resposta a seu pedido de um plano de estudos. Ribenboim publicou essa carta na revista La Gazette des Sciences Mathématiques du Québec (v. XIX, n. 1, dez. 1997), junto com uma introdução em que motiva as razões de ter feito esse pedido. Abaixo publicamos as traduções da introdução de Ribenboim e da carta de Dieudonné, e a lista das referências citadas na carta. Para a tradução da carta e a lista de referências, contamos com a valiosa ajuda de Israel Vainsencher (UFMG).

Sendo breve, a vida de um matemático pode ser dividida em três fases:

Na primeira, aquela de jubilosa ignorância, a M. é confiada a tarefa de obter um título resolvendo um problema. Apesar do seu júbilo, ou por causa dele, M. não tem outro recurso senão mostrar imaginação, ou então cair no abismo da ciência rotineira. Se apto a receber o M maiúsculo, a segunda fase começará. As opções são, por um lado, tornar-se um administrador, um professor ou escolher outra ocupação que, como tais, também valha a pena.

Por outro lado, M., que deseja continuar a ser chamado de M., percebe que seu mundo é rico e a ignorância é uma condição que cabe à juventude. É hora de aprender, sem esquecer os problemas e a imaginação.

Chega a hora em que M. está tão cheio de conhecimento que nem sabe o que não sabe.

Avanços na ciência? Novas modas? A eterna verdade transfigurada?

Um tempo para reflexão e a conclusão de que, não obstante todas as aparências externas, as teorias matemáticas interessantes – aquelas que merecem o mais alto grau "CLÁSSICA" (como os vinhos "GRAND CRU CLASSÉ") – são a base e a motivação dos desenvolvimentos contemporâneos.

Uma vez, quando acreditava que eu e também vários de meus colegas éramos M.'s, pedi a Dieudonné, meu primeiro mentor, que nos preparasse um plano de estudos e nos orientasse, no labirinto de ruído matemático incessante, a reconhecer o canto da sereia. Era um tempo em que planos quinquenais estavam na ordem do dia. Agora nós sabemos que a maioria deles fracassou miseravelmente. O nosso também.

Esse programa está esboçado na carta abaixo. Talvez, para supermarcianos, cinco anos de Júpiter fossem suficientes. Não para nós, aqui na Terra.

Condenado à consciência de minha própria ignorância, estou divulgando essa carta, para que mais pessoas não partilhem minha sina.

Paulo Ribenboim

Nice, 15 de junho de 1972

Meu caro Ribenboim,

Pensei um pouco sobre suas perguntas e venho lhe propor um programa mais ou menos na linha que você deseja, sem saber se realmente é o que se pode fazer de melhor.

1°. ano: Creio que é preciso começar tendo uma base sólida do que chamo de "geometria algébrica elementar", isto é, a teoria das "variedades de Serre" definidas como em FAC ([18]). Eu penso que de início é preciso limitar-se estritamente às variedades sobre um corpo algebricamente fechado (mas de característica arbitrária), e tentar chegar, nesse contexto, a demonstrar todos os teoremas que são citados na primeira parte do livro de Borel (e Bass): Linear algebraic groups ([1]). Uma boa parte é tratada em Mumford, Introduction to algebraic geometry ([7]), chap. I, mas é preciso completá-lo (por exemplo, com o "Main theorem" de Zariski; pode-se utilizar o Séminaire Cartan-Chevalley de 1955 ([15]) e algumas partes do Séminaire Chevalley 1956 ([16]) (Classification des groupes algébriques, conhecido como a "Bíblia")). Eu sei por experiência própria que se pode tratar disso tudo a fundo em 4 ou 5 meses de seminário. Seria bom pendurar nessas exposições todo um monte de velhos teoremas que se pode encontrar em van der Waerden, Algebraische Geometrie ([22]) (coleção amarela), Semple and Roth, Algebraic Geometry ([14]).

O fim desse ano poderia ser dedicado à parte cohomológica de FAC, seja completamente (o que pode ser um pouco difícil por causa da quantidade de álgebra homológica), seja limitando-se à teoria de curvas feita do ponto de vista dos feixes. Seria também necessário fazer a ligação com a teoria transcendente (GAGA) ([21]).

2°. ano: Poderia ser inteiramente dedicado aos grupos lineares algébricos, baseando-se em Borel e na "Bíblia"; minha experiência mostra que isso toma aproximadamente o ano todo; se sobrar tempo, pode-se abordar Borel-Tits, Groupes réductifs (IHES no. 27) ([5]), bem mais difícil.

Uma outra possibilidade seria fazer o livro de Serre "Groupes algébriques et corps de classes" ([19]), mais limitado mas bem mais orientado para a aritmética.

3°. ano: Pode-se abordar as questões misturando grupos algébricos e aritmética: há 3 artigos fundamentais:

Borel-Harishchandra, Arithmetic subgroups of algebraic groups, Annals of Math. 75 (1962), 485-535. ([4])

A. Borel, Introduction aux groupes arithmétiques, Hermann, 1969. ([2])

A. Weil, Adeles and algebraic groups (Notes de Princeton, 1961) ([24]).

É claro que para isso é necessário ter um bom conhecimento da teoria dos grupos lineares algébricos, o que pressupõe haver escolhido a primeira opção no 2°. ano. Se escolhida a segunda, poder-se-ia fazer aqui a teoria das curvas elípticas, incluindo a multiplicação complexa (ver o Séminaire Borel-Serre et al. sobre esse assunto, Lectures Notes no. 21 ([3])).

4°. ano: Até aqui se evitou esquemas, mas isso não é mais possível caso se queira ir mais longe. Ver de início os capítulos 2 e 3 de Mumford, Introduction to algebraic geometry ([8]), em seguida tentar se ater em EGA ([6]) ao que é necessário para abordar o livro de Mumford: Abelian Varieties ([9]); é também sem dúvida necessário um pedaço da teoria de intersecção, cuidadosamente evitada até aqui; ver Serre, Algèbre locale ([20]), ou Samuel, o fascículo dos Ergebnisse, Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique ([13]). O objetivo deveria ser o livro de Mumford, Abelian Varieties, ou seu outro livro, Geometric invariant theory ([10]), o qual se aproximaria da teoria dos grupos e suas representações.

5°. ano: Várias possibilidades:

a) Variedades abelianas sobre os corpos finitos (Weil, Tate, Honda etc.), eventualmente com a intervenção dos grupos formais (Cartier, Grothendieck).

b) Funções automorfas, formas modulares etc.

c) Teoria de Jacquet-Langlands.

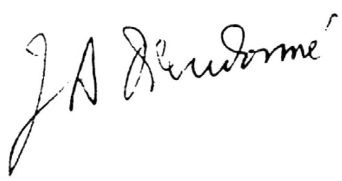
d) Geometria algébrica das superfícies à maneira moderna, há um livro de Mumford (Annals of Math. Studies) ([11]) e um de Shafarevich et al. (Inst. Steklov, acho eu, está traduzido) ([12]).

e) Teoria dos esquemas mais avançada (topologias de Grothendhieck e cohomologia étale, por exemplo). Etc. etc.

Quanto a referências, o Séminaire Bourbaki ([17]) tornou-se uma mina muito útil; para quase todo assunto, há várias exposições com bibliografia em geral bem detalhada.

Se voce tiver questões mais precisas sobre esse programa, não hesite em me escrever, tentarei respondê-las.

Saudações calorosas a ambos,



J. Dieudonné

Referências

[1] Borel, A. *Linear algebraic groups*. 2. enl. ed. New York: Springer, 1991. (Graduate Texts in Mathematics, 126).

[2] Borel, A. *Introduction aux groupes arithmétiques*. Paris: Hermann, 1969. (Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg, 15. Actualités Scientifiques et Industrièlles, 1341).

[3] Borel, A.; Chowla, S.; Herz, C. S.; Iwasawa, K.; Serre, J.-P. (Eds.) Seminar On Complex Multiplication. Princeton, Institute for Advanced Study, 1957–58. *Proceedings*. Berlin: Springer, 1966. (Lecture Notes in Mathematics, 21).

[4] Borel, A.; Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. *Annals of Mathematics* (2), v. 75, p. 485–535, 1962.

[5] Borel, A.; Tits, J. Groupes réductifs. *Institute des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, n. 27, p. 55–150, 1965.

[6] Grothendieck, A. *Éléments de Géometrie Algébrique*. Berlin: Springer, 1971. (Die Grundlehren der MathematischenWissenschaften, 166) Ver também artigos publicados em *Institute des Hautes Études Scientifiques. Publications Mathématiques*, ns. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960–67.

[7] Mumford, D. *The red book of varieties and schemes*, 2. ed. exp. Includes the Michigan lectures (1974) on curves and their Jacobians. With contributions by Enrico Arbarello. Berlin: Springer, 1999. (Lecture Notes in Mathematics, 1358).

[8] Mumford, D. *Introduction to algebraic geometry*. Preliminary version of first three chapters. Harvard: Harvard University, 1967.

[9] Mumford, D. *Abelian varieties*. With appendices

by C. P. Ramanujam and Yuri Manin. Corrected reprint of the second (1974) edition. Bombay/New Delhi: Tata Institute of Fundamental Research and Hindustan Book Agency, 2008. (Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, 5).

[10] MUMFORD, D.; FOGARTY, J.; KIRWAN, F. *Geometric invariant theory*. 2nd printing of 3. enl. ed. 1994. Berlin: Springer, 2002. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 34).

[11] MUMFORD, D. *Lectures on curves on an algebraic surface*. With a section by G. M. Bergman. Princeton: Princeton University Press, 1966. (Annals of Mathematics Studies, 59).

[12] SHAFAREVICH, I. R. ET AL. *Algebraic surfaces*. By the members of the seminar of I. R. Shafarevich. Translated from the Russian by Susan Walker. Translation edited, with supplementary material, by K. Kodaira and D. C. Spencer. Providence: American Mathematical Society, 1967. (Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 75).

[13] SAMUEL, P. *Méthodes d'algèbre abstraite en géométrie algébrique*. 2. ed. corrigée. Berlin: Springer, 1967. (Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 4).

[14] SEMPLE, J. G.; ROTH, L. *Introduction to algebraic geometry*. Oxford: Oxford University Press, 1985.

[15] SÉMINAIRE H. CARTAN, 8., 1955–56. *Géométrie algébrique*. Ed. Henri Paul Cartan et Claude Chevalley. Paris: École Normale Supérieure, 1958.

[16] SÉMINAIRE CHEVALLEY, 1956–58. *Classification des groupes de Lie algébriques*. Paris: École Normale Supérieure, 1958. 2v.

[17] SÉMINAIRE BOURBAKI. Paris: Societé Mathématique de France, 1948– .

[18] SERRE, J.-P. Faisceaux algébriques cohérents. *Annals of Mathematics* (2), v. 61, p. 197–278, 1955.

[19] SERRE, J.-P. *Groupes algébriques et corps de classes*. Reprint of the second edition. Paris: Hermann, 1984. (Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago, 7. Actualités Scientifiques et Industrièlles, 1264).

[20] SERRE, J.-P. *Algèbre locale: multiplicités; cours au Collège de France*, 1957–58. 3. ed. New York: Springer, 2002. (Lecture Notes in Mathematics, 11).

[21] SERRE, J.-P. Géométrie algébrique et géométri analytique. *Annales de l'Institute Fourier*, Grenoble,v. 6, p. 1–42, 1955–56.

[22] WAERDEN, B. L. VAN DER *Einführung in die algebraische geometrie*. Berlin: Springer, 1973.

[23] WEIL, A. *Adeles and algebraic groups*. Notes are based on lectures, given at the Institute for Advanced Study in 1959–1960. Boston: Birkhäuser, 1982. (Progress in Mathematics, 23).