Problemas

Foi realizada, de 4 a 10 de outubro de 2009, em Girardot, Colômbia, a I Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática (CIIM), da qual participaram 55 estudantes de seis países da América Latina. O Brasil participou com uma equipe nacional, escolhida pela OBM e liderada pelo professor Rodrigo Villard Milet, além das equipes da USP de São Paulo e do Instituto Militar de Engenharia.

O Brasil teve um ótimo desempenho na competição, conquistando ao todo 3 medalhas de ouro e uma de bronze. O estudante brasileiro Ramon Moreira Nunes, de Fortaleza, conquistou a Medalha de Ouro Especial na competição. A distinção corresponde a um prêmio especial outorgado somente aos melhores colocados dentre os ganhadores de medalhas de ouro.

Resultados dos estudantes brasileiros

Equipe Olímpica do Brasil: Ramon Moreira Nunes - Medalha de Ouro Especial; Rafael Daigo Hirama - Medalha de Ouro; Edson Augusto Bezerra Lopes - Medalha de Ouro; Felipe Gonçalves Assis - Medalha de Bronze.

Equipe Olímpica da Universidade de São Paulo: Gabriel Ponce - Medalha de Prata; Rodolfo Collegari - Medalha de Bronze.

Equipe Olímpica do Instituto Militar de Engenharia: Thomás Yoiti Sasaki Hoshina - Medalha de Prata; Diego Andrés de Barros Lima Barbosa - Medalha de Bronze; Jordan Freitas Piva - Medalha de Bronze; Kellem Corrêa Santos - Medalha de Bronze.

Primeiro dia – 6 de outubro de 2009

1. Demonstrar que, para qualquer n natural, o número $\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n$ é um inteiro ímpar.

2. Determinar se para todo natural n existe uma matriz $n \times n$ de números reais tal que seu determinante é 0, mas, ao mudar qualquer de seus elementos, obtém-se outra matriz com determinante distinto de zero.

3. Sejam $r > n$ inteiros positivos. Uma 'palavra boa' é uma sequência $a_1 \dots a_n$ de inteiros positivos diferentes entre 1 e r. Uma 'jogada' consiste em mudar uma letra a_i, de modo que a palavra obtida também seja boa. A distância entre duas palavras boas $A = a_1 \dots a_n$ e $B = b_1 \dots b_n$ é o número mínimo de jogadas que são necessárias para chegar de A a B. Achar a distância máxima possível entre duas palavras boas.

Segundo dia – 7 de outubro de 2009

4. Sejam m uma reta no plano e M um ponto que não pertence a m. Encontrar o lugar geométrico dos focos das parábolas com vértice M que sejam tangentes a m.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que:

(i) Para todo $a \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon$.

(ii) Para todo $b \in \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existem $x, y \in \mathbb{R}$ com $b - \varepsilon < x < b < y < b + \varepsilon$, $|f(x) - f(b)| < \varepsilon$ e $|f(y) - f(b)| < \varepsilon$.

Demonstrar que, se $f(a) < d < f(b)$, então existe c com $a < c < b$ ou $b < c < a$ tal que $f(c) = d$.

6. Seja ε uma raiz n-ésima da unidade. Suponhamos que $z = p(\varepsilon)$ é um número real para algum polinômio p com coeficientes inteiros. Demonstrar que existe um polinômio q com coeficientes inteiros tal que $z = q(2\cos 2\pi/n)$.