

# UM POUCO DE GEOMETRIA TROPICAL

Erwan Brugallé

Université Pierre et Marie Curie

Tradução:<sup>1</sup>

Edem Amorin (UFMG) e Nicolas Puignau (UFRJ)

Que estranhas figuras com propriedades misteriosas escondem-se por trás desse enigmático nome *geometria tropical*? Entre os trópicos, assim como em outro lugar, é difícil encontrar algo mais simples do que uma reta. Esse será nosso primeiro objeto de estudo. Uma reta tropical é formada por 3 semirretas usuais, de direções  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$  e  $(1, 1)$ , emanando de um ponto qualquer do plano (ver figura 1a). Pode-se perguntar, e com razão, por que chamar de reta, tropical ou não, esse objeto bizarro? No entanto, pensando bem, observamos que essas retas tropicais satisfazem as mesmas propriedades geométricas básicas que as retas “normais” ou “clássicas”: em posição genérica, duas retas tropicais concorrem num único ponto (ver figura 1b), e dois pontos do plano definem uma única reta tropical (ver figura 1c).

Mais importante ainda, embora menos visível no desenho, retas clássicas e tropicais são ambas dadas por uma equação da forma  $ax + by + c = 0$ . No contexto da álgebra usual, onde chamamos de adição uma adição e de multiplicação uma multiplicação, reconhecemos facilmente uma reta clássica nessa equação. Mas no mundo tropical, adicionar quer dizer tomar o máximo, multiplicar significa adicionar e todos os objetos alteram de forma! Para dizer a verdade, mesmo “ser igual a 0” tem outro sentido...

Geometrias clássicas e tropicais, então, são elaboradas segundo os mesmos princípios a partir de dois mo-

dos distintos de cálculo. Elas são as imagens de duas álgebras diferentes.

A geometria tropical, contudo, não é apenas uma brincadeira para matemáticos desocupados. O mundo clássico pode ser *degenerado* até o mundo tropical e os objetos tropicais conservam naturalmente algumas propriedades dos objetos clássicos dos quais são os limites. Assim, um enunciado tropical tem muita chance de possuir um enunciado clássico similar. Porém, os objetos tropicais são lineares por partes e, portanto, são muito mais simples de se estudar que os seus análogos clássicos!

Poderíamos, então, resumir a abordagem tropical pelo seguinte princípio:

*Estudar objetos simples, enunciar teoremas sobre objetos complicados.*

As primeiras partes deste texto são dedicadas à álgebra tropical, às curvas tropicais e a algumas de suas propriedades. Explicamos, em seguida, porque as geometrias clássica e tropical são vinculadas, mostrando sucintamente como o mundo clássico pode ser degenerado até o mundo tropical. Depois, ilustramos o princípio precedente pelo método chamado de *patchwork*, para construir curvas algébricas reais por meio das *amebas*. Terminamos este texto dando algumas referências bibliográficas.

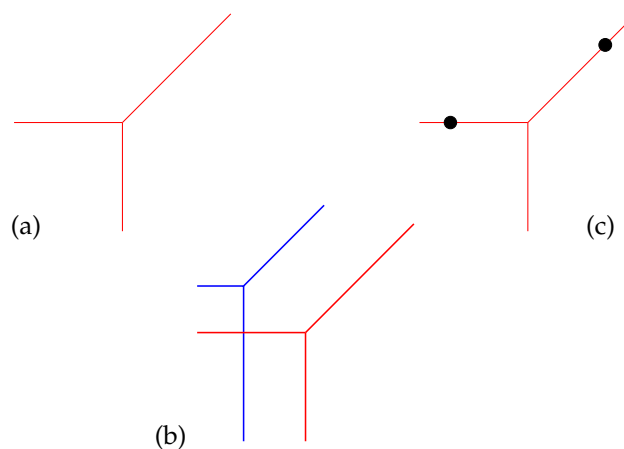


Figura 1: A reta tropical

<sup>1</sup> N. E. Este artigo foi publicado originalmente em francês, na revista *Quadrature*, v. 74, em 2009, sob o título “Un peu de géométrie tropicale”.

Antes de começar, entretanto, devemos explicar o porquê da palavra “tropical”. Seria devido à forma exótica dos objetos considerados? À presença de amebas com esqueleto? Antes de se falar de álgebra tropical, usava-se o nome mais prático de *álgebra max-plus*. Foi para honrar os trabalhos do seu colega brasileiro Imre Simon que pesquisadores de informática da Universidade Paris 7 decidiram trocar “max-plus” por “tropical”. Deixamos a conclusão à Wikipedia<sup>2</sup> sobre a origem da palavra tropical: *it simply reflects the French view on Brazil*.

## 1 Álgebra tropical

### 1.1 Operações tropicais

A álgebra tropical é obtida considerando-se o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e substituindo-se a adição pelo máximo e a multiplicação pela adição. Em outras palavras, são definidas duas novas operações sobre  $\mathbb{R}$ , chamadas de adição e multiplicação tropicais, denotadas respectivamente por “+” e “×” e definidas por

$$“x + y” = \max(x, y), \quad “x \times y” = x + y.$$

Neste texto, as operações algébricas tropicais são denotadas entre aspas. Como na multiplicação clássica, abreviamos muitas vezes “ $x \times y$ ” por “ $xy$ ”. Vamos nos familiarizar com essas duas operações estranhas fazendo alguns cálculos simples:

$$\begin{aligned} “1 + 1” &= 1, \quad “1 + 2” = 2, \quad “1 + 2 + 3” = 3, \\ “1 \times 2” &= 3, \quad “1 \times (2 + (-1))” = 3, \\ “1 \times (-2)” &= -1, \quad “(5 + 3)^2” = 10. \end{aligned}$$

Essas duas operações tropicais têm muitas propriedades em comum com a adição e a multiplicação clássicas. Por exemplo, ambas são comutativas e a operação “×” é distributiva em relação a “+” (i.e. “ $(x + y)z$ ” = “ $xz + yz$ ”). Existem contudo duas diferenças. Em primeiro lugar, a adição tropical não tem elemento neutro em  $\mathbb{R}$ . Mas qual a importância? Podemos estender

<sup>2</sup> 15 de Março de 2009.

naturalmente nossas duas operações tropicais a  $-\infty$  assim: para qualquer  $x \in \mathbb{T}$ ,

$$“x + (-\infty)” = \max(x, -\infty) = x$$

e

$$“x \times (-\infty)” = x + (-\infty) = -\infty,$$

onde  $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup -\infty$  é o conjunto dos números tropicais. Então, ao acrescentar  $-\infty$  a  $\mathbb{R}$ , a adição tropical possui um elemento neutro. Por outro lado, existe uma diferença mais importante entre adições tropical e clássica: um elemento de  $\mathbb{R}$  não tem simétrico para a operação “+”. Em outras palavras, não está definida a subtração tropical. Além disso, desta vez não adianta mais acrescentar elementos a  $\mathbb{T}$  para “criar” simétricos. Com efeito, “+” é idempotente, isto é, “ $x + x$ ” =  $x$  para todo  $x$  em  $\mathbb{T}$ ! Então não temos outra opção a não ser adaptarmos-nos com essa ausência de simétricos para “+”.

Porém, a menos desse último ponto, o conjunto  $\mathbb{T}$  munido das operações “+” e “×” satisfaz todas outras propriedades de um corpo. Por exemplo, 0 é o elemento neutro da multiplicação tropical e qualquer elemento  $x$  de  $\mathbb{T}$  distinto de  $-\infty$  tem como inverso “ $\frac{1}{x}$ ” =  $-x$ . Dizemos que  $\mathbb{T}$  é um *semicorpo*.

Cuidado para não ir rápido demais na escrita de fórmulas tropicais! Assim, “ $2x$ ”  $\neq$  “ $x + x$ ” mas “ $2x$ ” =  $x + 2$ , também “ $1x$ ”  $\neq$   $x$  mas “ $1x$ ” =  $x + 1$ , ou ainda “ $0x$ ” =  $x$  e “ $(-1)x$ ” =  $x - 1$ .

### 1.2 Polinômios tropicais

Após ter definido a adição e a multiplicação tropicais, chegamos naturalmente a considerar funções do tipo  $P(x) = “\sum_{i=0}^d a_i x^i”$  com os  $a_i$  em  $\mathbb{T}$ , isto é polinômios tropicais<sup>3</sup>. Reescrevendo-se  $P(x)$  com as notações clássicas, obtém-se  $P(x) = \max_{i=1}^d (a_i + ix)$ . Abaixo alguns exemplos de polinômios tropicais:

$$\begin{aligned} “x” &= x, \quad “1 + x” = \max(1, x), \\ “1 + x + 3x^2” &= \max(1, x, 2x + 3), \\ “1 + x + 3x^2 + (-2)x^3” &= \max(1, x, 2x + 3, 3x - 2). \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Consideramos, com efeito, as funções polinomiais em vez dos polinômios.

Determinamos agora as raízes de um polinômio tropical. Porém, antes de mais nada, o que é uma raiz tropical? Encontramos aqui um problema frequente da matemática tropical: uma noção clássica tem várias definições equivalentes que não são mais equivalentes no mundo tropical. Cada definição de um mesmo objeto clássico gera, então, potencialmente tantos quantos objetos tropicais diferentes.

A primeira definição de uma raiz de um polinômio clássico  $P(x)$  é um elemento  $x_0$  tal que  $P(x_0) = 0$ . Se levamos esta definição para a álgebra tropical, procuramos então os elementos  $x_0$  em  $\mathbb{T}$  tais que  $P(x_0) = -\infty$ . Se, porém,  $a_0$  é o termo constante do polinômio  $P(x)$  então  $P(x) \geq a_0$  para todo  $x$  em  $\mathbb{T}$ . Logo, se  $a_0 \neq -\infty$  então o polinômio  $P(x)$  não tem raiz... Esta definição não é muito satisfatória.

Alternativamente,  $x_0$  é uma raiz clássica do polinômio  $P(x)$  se existe um polinômio  $Q(x)$  tal que  $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ . Veremos que esta é uma boa inspiração para uma definição na álgebra tropical. Para tanto, adotamos um ponto de vista geométrico sobre o problema. Um polinômio tropical é uma função afim por partes (ver figura 2), e chamamos de *raiz tropical* do polinômio  $P(x)$  qualquer ponto  $x_0$  de  $\mathbb{T}$  para o qual o gráfico de  $P(x)$  tem uma “quina” em  $x_0$ . Além disso, a diferença entre duas inclinações adjacentes a uma raiz tropical corresponde à *multiplicidade* dessa raiz. Assim, o polinômio “ $0 + x$ ” tem como raiz simples 0, o polinômio “ $0 + x + (-1)x^2$ ” tem como raízes simples 0 e 1 e o polinômio “ $0 + x^2$ ” tem 0 como raiz dupla.

As raízes tropicais do polinômio

$$P(x) = \left( \sum_{i=0}^d a_i x^i \right) = \max_{i=1}^d (a_i + ix)$$

são então exatamente os números tropicais  $x_0$  para os quais existem  $i$  e  $j$  distintos tais que  $P(x_0) = a_i + ix_0 = a_j + jx_0$ . Dizemos que o máximo de  $P(x)$  é atingido duas vezes (pelo menos) em  $x_0$ . Neste caso, a multiplicidade de  $x_0$  é o máximo de  $|i - j|$  entre todos os  $i$  e  $j$  possíveis que cumpram este máximo. Por exemplo, o máximo de  $P(x) = \left( 0 + x + x^2 \right)$  é atingido 3 vezes em 0 e a multiplicidade dessa raiz é 2. De maneira equivalente,  $x_0$  é uma raiz tropical de multipli-

cidade  $k$  de  $P(x)$  se existir um polinômio  $Q(x)$  tal que  $P(x) = \left( (x + x_0)^k Q(x) \right)$ . Notemos que o fator  $x - x_0$  na álgebra clássica é transformado no fator “ $x + x_0$ ”, dado que a raiz do polinômio “ $x + x_0$ ” é  $x_0$ , e não  $-x_0$ .

Essa definição de raiz tropical parece claramente mais satisfatória que a primeira. De fato, temos a seguinte proposição.

**Proposição 1.** *O semicorpo tropical é algebricamente fechado, isto é, qualquer polinômio tropical de grau  $d$  tem exatamente  $d$  raízes tropicais contadas com multiplicidade.*

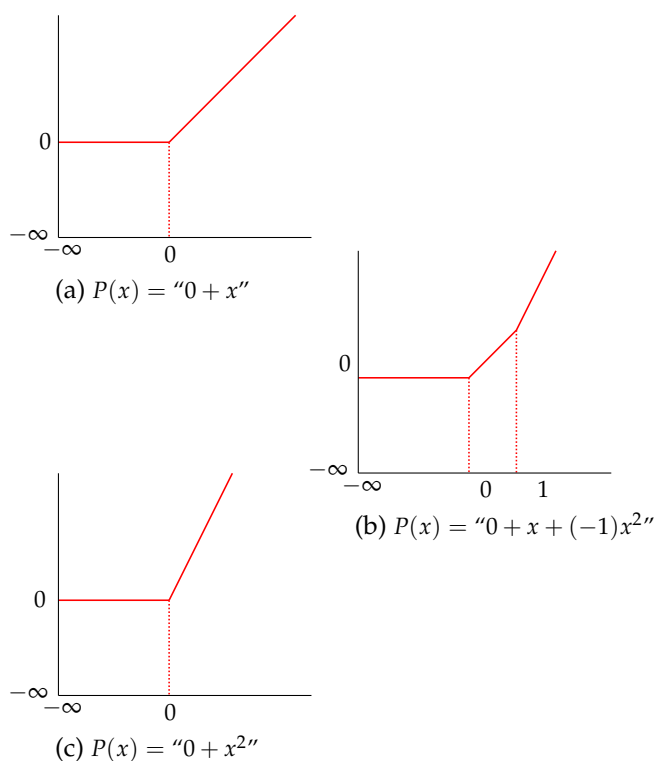


Figura 2: Exemplos de gráficos de polinômios tropicais

Por exemplo, temos as fatorações seguintes<sup>4</sup>:

$$\left( 0 + x + (-1)x^2 \right) = \left( (-1)(x + 0)(x + 1) \right)$$

e

$$\left( 0 + x^2 \right) = \left( (x + 0)^2 \right).$$

<sup>4</sup> Outra vez, essas igualdades são verdadeiras em relação às funções polinomiais, não em relação aos polinômios! Assim, “ $0 + x^2$ ” e “ $(0 + x)^2$ ” são iguais como funções polinomiais, mas não como polinômios.

### 1.3 Exercícios

1. Como o fato da adição tropical ser idempotente impede a existência de simétricos para essa adição?
2. Construa os grafos dos polinômios tropicais  $P(x) = "x^3 + 2x^2 + 3x + (-1)"$  e  $Q(x) = "x^3 + (-2)x^2 + 2x + (-1)"$ , e determine as suas raízes tropicais.
3. Seja  $a$  em  $\mathbb{R}$  e  $b$  e  $c$  em  $\mathbb{T}$ . Determine as raízes polinomiais tropicais de " $ax + b$ " e " $ax^2 + bx + c$ ".

## 2 Curvas tropicais

### 2.1 Definições

Sem nos assustarmos, aumentemos o número de variáveis dos nossos polinômios. Um polinômio tropical em duas variáveis é escrito como  $P(x, y) = "\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j"$ , ou ainda  $P(x, y) = \max_{i,j} (a_{i,j} + ix + jy)$  na notação clássica. Assim,  $P(x, y)$  é ainda uma função afim por partes, e a curva tropical definida por  $P(x, y)$  é o lugar das quinas dessa função. Em outras palavras, é constituída dos pontos  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{T}^2$  para os quais o máximo de  $P(x, y)$  é atingido pelo menos duas vezes em  $(x_0, y_0)$ .

Confessamos imediatamente que estaremos satisfeitos neste texto em estudar as curvas tropicais em  $\mathbb{R}^2$  em vez de em  $\mathbb{T}^2$ . Isso não prejudica a generalidade do que é discutido aqui e, ainda, as definições, os enunciados e os desenhos ficam mais simples e mais compreensíveis.

Olhemos a reta tropical definida pelo polinômio  $P(x, y) = "\frac{1}{2} + 2x + (-5)y"$ . É necessário então procurar os pontos  $(x_0, y_0)$  no  $\mathbb{R}^2$  que verificam um dos três sistemas seguintes:

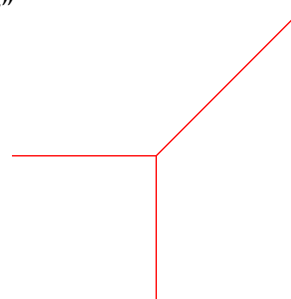
$$\begin{aligned} 2 + x_0 = \frac{1}{2} &\geq -5 + y_0, \\ -5 + y_0 = \frac{1}{2} &\geq 2 + x_0, \\ 2 + x_0 = -5 + y_0 &\geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

A nossa reta tropical então é constituída das três semi-retas  $\{(-\frac{3}{2}, y) \mid y \leq \frac{11}{2}\}$ ,  $\{(x, \frac{11}{2}) \mid x \leq -\frac{3}{2}\}$ , e  $\{(x, x + 7) \mid x \geq -\frac{3}{2}\}$  (ver a figura 3a).

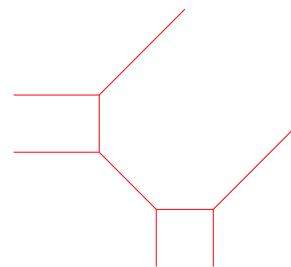
Falta-nos ainda um dado para definir rigorosamente uma curva tropical. O lugar das quinas de um polinômio tropical com duas variáveis é constituído de segmentos e semirretas, chamados de *arestas*, os quais se cortam em pontos, chamados de *vértices*. Como no caso de polinômios de uma variável, devemos considerar, para cada aresta, a diferença de inclinação de  $P(x, y)$  dos dois lados dessa aresta. Chegamos assim à seguinte definição formal.

**Definição 2.1.** Seja  $P(x, y) = "\sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j"$  um polinômio tropical. A curva tropical  $C$  definida por  $P(x, y)$  é o conjunto dos pontos  $(x_0, y_0)$  de  $\mathbb{R}^2$  tais que existam  $(i, j) \neq (k, l)$  que verifiquem  $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0 = a_{k,l} + kx_0 + ly_0$ . Definimos o peso de uma aresta  $C$  como o máximo dos MDC dos números  $|i - k|$  e  $|j - l|$  para cada par  $(i, j)$  e  $(k, l)$  correspondendo a essa aresta.

(a) " $\frac{1}{2} + 2x + (-5)y$ "



(b) " $3 + 2x + 2y + 3xy + y^2 + x^2$ "



(c) " $0 + x + y^2 + (-1)x^2$ "

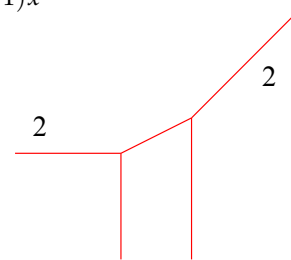


Figura 3: Algumas curvas tropicais

Nos desenhos, escreveremos o peso de uma aresta ao lado dela apenas se o peso for pelo menos 2. No caso da reta tropical, todas as arestas são de peso 1, então a figura 3a descreve efetivamente uma reta tropical. Dois exemplos de curvas tropicais de grau 2 são representados nas figuras 3b e 3c. A cônica tropical da figura 3c tem duas arestas de peso 2.

## 2.2 Subdivisão dual

Um polinômio tropical  $P(x, y)$  é então dado pelo máximo de um número finito de funções afins, que são os monômios de  $P(x, y)$ . Além disso, os pontos do plano nos quais ao menos dois monômios realizam este máximo são precisamente os pontos da curva tropical definida por  $P(x, y)$ . Refinamos um pouco este estudo e, para cada ponto  $(x_0, y_0)$  de  $C$ , consideramos todos os monômios de  $P(x, y)$  que realizam esse máximo em  $(x_0, y_0)$ .

Estudamos em primeiro lugar o caso da reta tropical  $C$  definida por  $P(x, y) = \frac{1}{2} + 2x + (-5)y$  (ver figura 3a). No ponto  $(-\frac{3}{2}, \frac{11}{2})$ , o vértice da reta, os três monômios  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^0y^0$ ,  $2x = 2x^1y^0$  e  $(-5)y = (-5)x^0y^1$  têm o mesmo valor. Os expoentes destes monômios, isto é, os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ , definem um triângulo  $\Delta_1$  (ver figura 4a). Ao longo da aresta horizontal de  $C$ , o valor do polinômio  $P(x, y)$  é dado pelos monômios  $0$  e  $y$ , isto é, pelos monômios de expoentes  $(0, 0)$  e  $(0, 1)$ . O segmento definido por estes dois expoentes é então a aresta vertical do triângulo  $\Delta_1$ . Do mesmo modo, os monômios que dão o valor de  $P(x, y)$  ao longo da aresta vertical (respectivamente de inclinação 1) de  $C$  têm expoentes  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  (respectivamente  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ ), e o segmento definido por estes expoentes é a aresta horizontal (respectivamente de inclinação  $-1$ ) do triângulo  $\Delta_1$ .

O que lembrar deste curto exercício? Olhando os monômios que dão o valor do polinômio tropical  $P(x, y)$  num ponto da reta tropical  $C$ , vemos que o vértice de  $C$  corresponde ao triângulo  $\Delta_1$  e que cada aresta  $e$  de  $C$  corresponde a uma aresta de  $\Delta_1$  cuja direção é perpendicular à de  $e$ .

Olhemos agora a cônica tropical definida pelo polinô-

mio  $P(x, y) = "3 + 2x + 2y + 3xy + x^2 + y^2"$ , representada na figura 3b. Essa curva tem por vértices os quatro pontos  $(-1, 1)$ ,  $(-1, 2)$ ,  $(1, -1)$  e  $(2, -1)$ . Em cada um desses vértices  $(x_0, y_0)$ , o valor do polinômio  $P(x, y)$  é dado por três monômios:

$$P(-1, 1) = 3 = y_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3,$$

$$P(-1, 2) = y_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 = 2y_0,$$

$$P(1, -1) = 3 = x_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3,$$

$$P(2, -1) = x_0 + 2 = x_0 + y_0 + 3 = 2x_0.$$

Assim, para cada vértice de  $C$ , os expoentes dos três monômios correspondentes definem um triângulo, e esses quatro triângulos são dispostos como na figura 4b. Além disso, como no caso da reta, para cada aresta  $e$  de  $C$ , os expoentes dos monômios que dão o valor de  $P(x, y)$  ao longo de  $e$  definem uma aresta (ou duas) desses triângulos e a direção dessa aresta é perpendicular à de  $e$ .

Explicaremos agora este fenômeno em toda generalidade. Seja  $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j}x^i y^j$  um polinômio tropical qualquer. O grau de  $P(x, y)$  é o máximo das somas  $i + j$  para os coeficientes  $a_{i,j}$  diferentes de  $-\infty$ . Para simplificar, todos os polinômios de grau  $d$  considerados neste texto satisfazem  $a_{0,0} \neq -\infty$ ,  $a_{d,0} \neq -\infty$  e  $a_{0,d} \neq -\infty$ . Assim, a envoltória convexa dos pontos  $(i, j)$  tais que  $a_{i,j} \neq -\infty$  é o triângulo  $\Delta_d$  de vértices  $(0, 0)$ ,  $(d, 0)$  e  $(0, d)$ .

Se  $v = (x_0, y_0)$  é um vértice de  $C$  então a envoltória convexa dos pontos  $(i, j)$  em  $\Delta_d \cap \mathbb{Z}^2$  tais que  $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0$  é um polígono  $\Delta_v$  incluído em  $\Delta_d$ . Do mesmo modo, se  $(x_0, y_0)$  é um ponto no interior de uma aresta  $e$ , então a envoltória convexa dos pontos  $(i, j)$  em  $\Delta_d \cap \mathbb{Z}^2$  tais que  $P(x_0, y_0) = a_{i,j} + ix_0 + jy_0$  é um segmento  $\delta_e$  incluído em  $\Delta_d$ . Como o polinômio tropical  $P(x, y)$  é uma função convexa afim por partes, a união dos  $\Delta_v$  forma uma subdivisão de  $\Delta_d$ . Em outras palavras, a união dos polígonos  $\Delta_v$  é igual ao triângulo  $\Delta_d$ , e dois polígonos  $\Delta_v$  e  $\Delta_{v'}$  têm ou uma aresta comum, ou um vértice comum, ou não se cruzam. Além disso, se  $e$  é uma aresta de  $C$  adjacente ao vértice  $v$ , então  $\delta_e$  é uma aresta de  $\Delta_v$ , e as direções de  $e$  e  $\delta_e$  são perpendiculares. Esta subdivisão  $\Delta_d$  é chamada a sub-

divisão dual à curva  $C$ .

Por exemplo, as subdivisões duais às curvas tropicais da figura 3 estão desenhadas na figura 4 (os pontos pretos representam os pontos com coordenadas inteiras e não são necessariamente vértices da subdivisão).

Observamos que  $e$  é uma aresta de peso  $w$  em  $C$  se e só se o segmento  $\delta_e$  contém  $w + 1$  pontos em  $\mathbb{Z}^2$ . Assim, o grau de uma curva tropical pode ser lido diretamente na curva: é a soma dos pesos das arestas infinitas na direção  $(-1, 0)$  (ou  $(0, -1)$ , ou ainda  $(1, 1)$ ). Além disso, uma curva tropical é dada pela sua subdivisão dual, a menos de translação e comprimento das arestas.

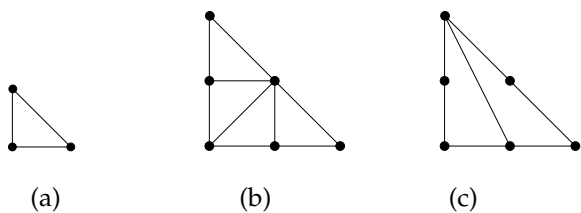


Figura 4: Algumas subdivisões duais

### 2.3 Grafos equilibrados e curvas tropicais

A primeira consequência dessa dualidade é o fato que uma certa equação, chamada de *relação de equilíbrio*, é verificada em todos os vértices de uma curva tropical. Seja  $v$  um vértice de  $C$  adjacente às arestas  $e_1, \dots, e_k$  de pesos, respectivamente,  $w_1, \dots, w_k$ . Como  $e_i$  é suportado por uma reta (no sentido usual) cuja equação tem coeficientes inteiros, existe um único vetor inteiro  $\vec{v}_i = (\alpha, \beta)$  em  $e_i$  com  $MDC(\alpha, \beta) = 1$  e origem em  $v$  (ver figura 5a). Depois da seção precedente, o polígono  $\Delta_v$  dual a  $v$  deduz-se imediatamente dos vetores  $w_1\vec{v}_1, \dots, w_k\vec{v}_k$ : se orientamos o bordo de  $\Delta_v$  no sentido inverso dos ponteiros de um relógio, então cada aresta  $\delta_{e_i}$  de  $\Delta_v$  dual a  $e_i$  é obtida a partir do vetor  $w_i\vec{v}_i$  por rotação de ângulo  $\frac{\pi}{2}$  (ver figura 5b).

Dado que  $\Delta_v$  é fechado, lemos então imediatamente a relação de equilíbrio seguinte:

$$\sum_{i=1}^k w_i \vec{v}_i = 0.$$

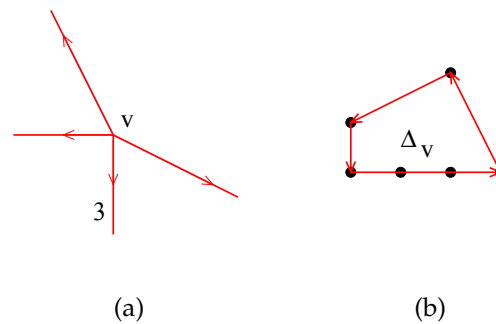


Figura 5: Relações de equilíbrio

Um grafo no  $\mathbb{R}^2$  que verifica a relação de equilíbrio em todos os seus vértices é chamado de *grafo equilibrado*. Acabamos então de mostrar que uma curva tropical é sempre um grafo equilibrado. Temos que a recíproca é verdadeira.

**Teorema 2.2.** *As curvas tropicais no  $\mathbb{R}^2$  são exatamente os grafos equilibrados.*

Assim, pode-se afirmar que existem polinômios tropicais de grau 3 cujas curvas tropicais são os grafos equilibrados representados na figura 6. Também representamos para cada caso a subdivisão de  $\Delta_3$  dual à curva.

### 2.4 Exercícios

1. Desenhe as curvas tropicais definidas pelos polinômios tropicais:  $P(x, y) = "5 + 5x + 5y + 4xy + 1y^2 + x^2"$  e  $Q(x, y) = "7 + 4x + y + 4xy + 3y^2 + (-3)x^2"$ , assim como suas subdivisões duais.
2. Um triângulo tropical é uma região de  $\mathbb{R}^2$  delimitada por três retas tropicais. Quais são as formas possíveis de um triângulo tropical?
3. Mostre que uma curva tropical de grau  $d$  tem no máximo  $d^2$  vértices.
4. Encontre uma equação para cada curva tropical da figura 6. Lembramos que se  $v$  é um vértice de uma curva tropical definida pelo polinômio tropical  $P(x, y)$ , então o valor de  $P(x, y)$  numa vizinhança de  $v$  é dado unicamente pelos monômios correspondendo ao polígono dual a  $v$ .



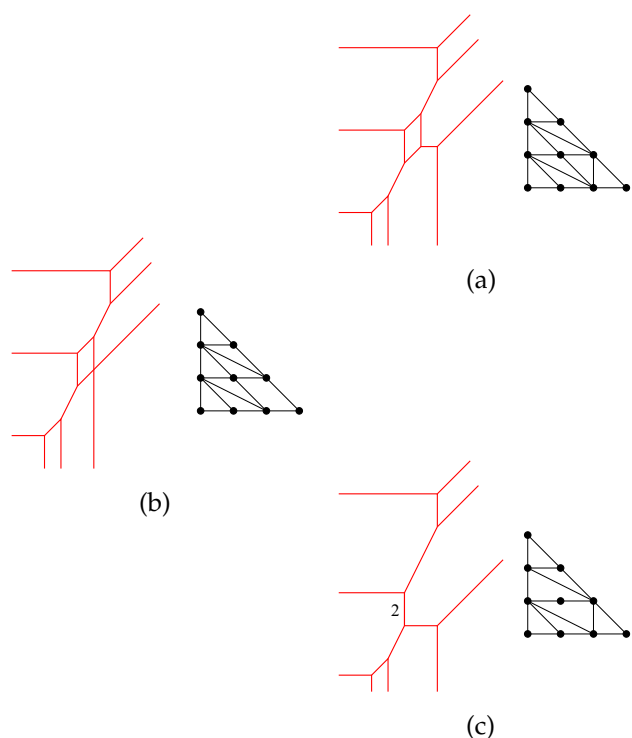


Figura 6: Curvas tropicais e suas subdivisões duais

### 3 Intersecção tropical

#### 3.1 Teorema de Bézout

Um dos maiores interesses da geometria tropical é fornecer um modelo simples da geometria algébrica. Por exemplo, teoremas básicos sobre a intersecção de curvas tropicais precisam de uma bagagem algébrica claramente menos importante que os seus homólogos clássicos. Vamos ilustrar esse princípio com o teorema de Bézout, o qual afirma que duas curvas algébricas planas de grau  $d_1$  e  $d_2$  cortam-se em  $d_1d_2$  pontos<sup>5</sup>. Antes do caso geral, olhamos primeiro as retas e as cônicas tropicais.

Exceto por acidente, duas retas tropicais se cortam num ponto único (ver figura 7a, à esquerda), tal como em geometria clássica. Agora, uma reta e uma cônica tropical cortam-se em dois pontos? Se contarmos simplesmente o número de pontos de intersecção, a resposta é: às vezes sim (figura 7b, esquerda), às vezes não

<sup>5</sup> Cuidado, isso é um teorema da geometria projetiva! Por exemplo, duas retas afins podem ser paralelas...

(figura 7c, esquerda)...

Com efeito, o único ponto de intersecção da cônica e da reta tropicais na figura 7c deve ser contado 2 vezes. Mas por que 2 aqui e 1 nos casos precedentes? A resposta encontra-se na subdivisão dual da união das duas curvas.

Observamos primeiro que a união de duas curvas tropicais  $C_1$  e  $C_2$  é ainda uma curva tropical. Com efeito, é fácil conferir que a união de dois grafos equilibrados é ainda um grafo equilibrado. Por outro lado, vemos que se as curvas tropicais  $C_1$  e  $C_2$  são respectivamente definidas pelos polinômios tropicais  $P_1(x, y)$  e  $P_2(x, y)$ , então o polinômio  $Q(x, y) = "P_1(x, y)P_2(x, y)"$  define precisamente a curva  $C_1 \cup C_2$ . Além disso, o grau de  $C_1 \cup C_2$  é a soma dos graus de  $C_1$  e  $C_2$ . Assim, faz realmente sentido falar da subdivisão dual à curva  $C_1 \cup C_2$ .

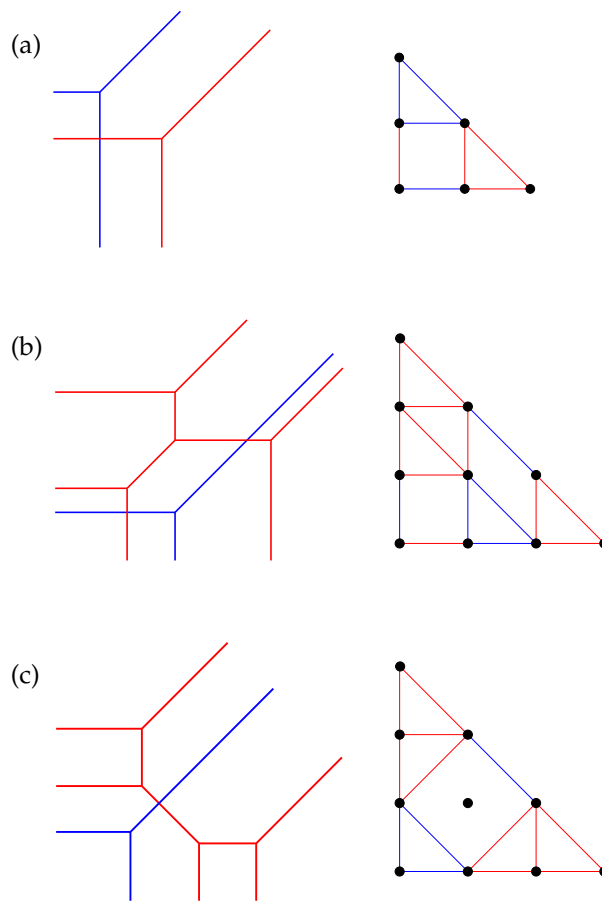


Figura 7: Intersecção de retas e de cônicas tropicais e subdivisões duais à união das curvas, em cada caso

As subdivisões duais à união das curvas  $C_1$  e  $C_2$  em cada caso da figura 7 estão representadas na figura 7, à direita. Em cada um deles, os vértices de  $C_1 \cup C_2$  são os vértices de  $C_1$ , os vértices de  $C_2$  e os pontos da intersecção de  $C_1$  com  $C_2$ . Mas como cada ponto de  $C_1 \cap C_2$  é a intersecção de uma aresta de  $C_1$  e de uma aresta de  $C_2$ , o polígono dual de tal vértice de  $C_1 \cup C_2$  é um paralelogramo. Para tornar a figura mais transparente, desenhemos cada aresta da subdivisão dual da mesma cor que sua aresta dual. Constatamos então que nas figuras 7a e 7b, os paralelogramos que correspondem são de área 1, enquanto o paralelogramo da subdivisão da figura 7c é de área 2! Assim, parece que devemos contar cada ponto de intersecção com a multiplicidade definida como a seguir.

**Definição 3.1.** *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas tropicais cruzando-se num número finito de pontos e fora dos vértices das duas curvas e seja  $p$  um ponto de intersecção de  $C_1$  com  $C_2$ . A multiplicidade tropical de  $p$  como ponto de intersecção de  $C_1$  com  $C_2$  é a área do paralelogramo dual a  $p$  na subdivisão dual a  $C_1 \cup C_2$ .*

Com esta definição, demonstrar o teorema de Bézout tropical torna-se uma brincadeira.

**Teorema 3.2.** *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas tropicais de grau  $d_1$  e  $d_2$  cruzando-se num número finito de pontos e fora dos vértices das duas curvas. Então, a soma das multiplicidades tropicais dos pontos de intersecção de  $C_1$  e de  $C_2$  é igual a  $d_1 d_2$ .*

*Demonstração.* Denotemos por  $s$  essa soma. Existem três tipos de polígonos na subdivisão dual à curva tropical  $C_1 \cup C_2$ :

- os duais a um vértice de  $C_1$ ; a soma de suas áreas vale a área de  $\Delta_{d_1}$ , isto é,  $d_1^2/2$ ;
- os duais a um vértice de  $C_2$ ; a soma de suas áreas vale  $d_2^2/2$ ;
- os duais a um ponto de intersecção de  $C_1$  com  $C_2$ ; a soma de suas áreas vale  $s$ .

□

### 3.2 Intersecção estável

Consideramos, por enquanto, apenas as curvas tropicais cruzando-se “agradavelmente”, isto é, num número finito de pontos e fora dos vértices. Mas que podemos dizer nos dois casos representados nas figuras 8a (duas retas tropicais cruzam-se ao longo de uma aresta) e 8b (uma reta passando pelo vértice de uma cônica)? Felizmente, temos mais de um truque tropical no nosso bolso.

Seja  $\varepsilon$  um pequeno número real e  $\vec{v}$  um vetor cuja razão das coordenadas é um número irracional. Se trasladamos em cada caso uma das duas curvas pelo vetor  $\varepsilon\vec{v}$ , terminamos então no caso de uma intersecção agradável (ver figuras 8c e 8d). Evidentemente os nossos novos pontos de intersecção dependem do vetor  $\varepsilon\vec{v}$ . Por outro lado, o limite desses pontos quando  $\varepsilon$  tende para 0 não depende de  $\vec{v}$ : eles são os pontos de intersecção estável das duas curvas. Sua multiplicidade é a soma das multiplicidades dos pontos de intersecção dos quais são limites.

Por exemplo, o ponto de intersecção estável das duas retas da figura 8a é o vértice da reta da esquerda, de multiplicidade 1. Nossas duas retas tropicais cruzam-se bem num ponto único. O ponto de intersecção estável das duas curvas da figura 8b é o vértice da cônica, de multiplicidade 2.

Observamos que a intersecção estável de duas curvas tropicais é concentrada nos pontos de intersecção isolados e nos vértices das duas curvas. Graças à intersecção estável, podemos remover do Teorema de Bézout tropical as hipóteses de bom posicionamento das duas curvas.

**Teorema 3.3.** *Sejam  $C_1$  e  $C_2$  duas curvas tropicais de grau  $d_1$  e  $d_2$ . Então a soma das multiplicidades dos pontos de intersecção estáveis de  $C_1$  com  $C_2$  vale  $d_1 d_2$ .*

Descobrimos por acaso um fenômeno tropical surpreendente: uma curva tropical tem uma *auto-intersecção* bem definida<sup>6</sup>! Com efeito é suficiente consi-

<sup>6</sup> Em geometria algébrica clássica, só o número de pontos de autointersecção de uma curva plana é definido, não a sua posição sobre a curva. Uma reta tem auto-intersecção num ponto, mas não é claro qual é este ponto...



derar a intersecção estável dessa curva tropical consigo mesma. Segundo o que precede, essa autointersecção é concentrada nos vértices da curva (ver figura 9).

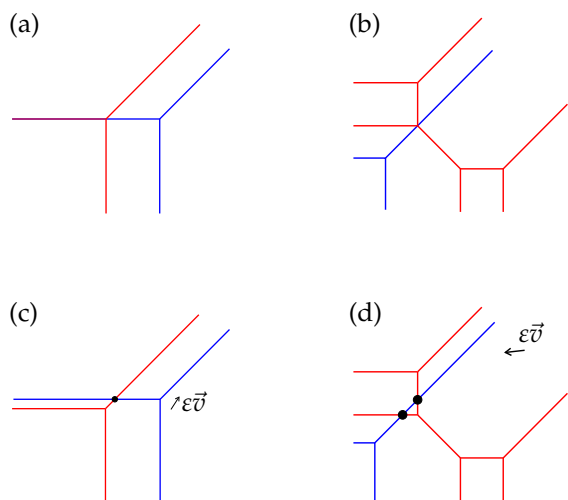


Figura 8: Intersecções não transversais e translações

### 3.3 Exercícios

1. Determine os pontos de intersecção estável das duas curvas tropicais do exercício 1 da seção 2, bem como suas multiplicidades.
2. Um ponto duplo de uma curva tropical é a intersecção de duas de suas arestas. Mostre que uma cônica tropical com um ponto duplo é a união de duas retas tropicais. Pode-se considerar uma reta passando pelo ponto duplo e por um outro vértice da cônica.
3. Mostre que uma curva tropical de grau 3 com dois pontos duplos é a união de uma reta e de uma cônica tropical. Mostre que uma curva tropical de grau 3 com três pontos duplos é a união de três retas tropicais.

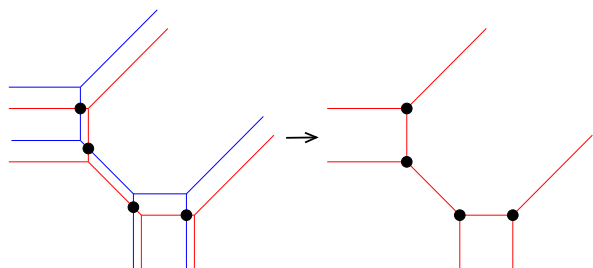


Figura 9: Quatro pontos de auto-intersecção de uma cônica tropical

## 4 Algumas explicações

Paramos alguns momentos no estudo da geometria tropical como tal e damos algumas razões do vínculo muito forte entre geometria clássica e geometria tropical. O nosso objetivo é ilustrar especialmente o fato de a geometria tropical ser um limite da geometria clássica. Para resumir grosseiramente o conteúdo desta seção, a geometria tropical é a imagem da geometria clássica pelo logaritmo de base  $\infty$ .

### 4.1 Dequantificação de Maslov

Expliquemos primeiro como o semicorpo tropical é obtido naturalmente como limite de semicorpos clássicos. Este processo, estudado por Victor Maslov e seus colaboradores a partir dos anos 90, chama-se *dequantificação dos números reais*.

Um semicorpo conhecido é  $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ , o conjunto dos números reais positivos ou nulos munido da adição e da multiplicação clássicas. Se  $t$  é um número estritamente maior do que 1, então o logaritmo de base  $t$  fornece uma bijeção entre  $\mathbb{R}_+$  e  $\mathbb{T}$ , e essa bijeção induz uma estrutura de semicorpo em  $\mathbb{T}$ , onde as operações, denotadas por “ $+_t$ ” e “ $\times_t$ ”, são dadas por

$$“x +_t y” = \log_t(t^x + t^y)$$

e

$$“x \times_t y” = \log_t(t^x t^y) = x + y.$$

Já vemos aparecer a adição clássica tal como uma multiplicação exótica sobre  $\mathbb{T}$ . Observamos que, por construção, todos os semicorpos  $(\mathbb{T}, “+_t”, “\times_t”)$  são isomorfos a  $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ . A desigualdade trivial  $\max(x, y) \leq x + y \leq 2 \max(x, y)$  sobre  $\mathbb{R}_+$  combinada com o crescimento da função logaritmo nos dá o enquadramento seguinte:

$$\forall t > 0, \max(x, y) \leq “x +_t y” \leq \max(x, y) + \log_t 2.$$

Quando  $t$  tende para o infinito  $\log_t 2$  tende para 0, e a lei “ $+_t$ ” tende então para a adição tropical “ $+$ ”! Assim, o semicorpo tropical é obtido naturalmente como deformação do semicorpo clássico  $(\mathbb{R}_+, +, \times)$ . Ou ainda, podemos ver o semicorpo clássico  $(\mathbb{R}_+, +, \times)$  como uma

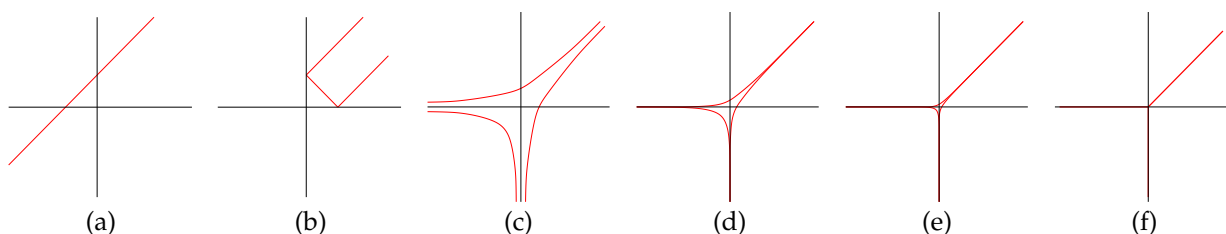


Figura 10: Dequantificação de uma reta

deformação do corpo tropical, daí o uso da palavra “dequantificação”.

#### 4.2 Dequantificação de uma reta no plano

Vamos aplicar um raciocínio semelhante com a reta de equação  $x - y + 1$  no plano  $\mathbb{R}^2$  (ver figura 10a). Primeiramente, contraímos os 4 quadrantes sobre o quadrante positivo com a função valor absoluto (ver figura 10b). A imagem pelo logaritmo de base  $t$  desta reta contraída no  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  parece o desenho da figura 10c. Por definição, tomar o logaritmo de base  $t$  corresponde a tomar o logaritmo natural  $e$ , em seguida, aplicar uma homotetia de razão  $\frac{1}{\ln t}$ . Assim, quando  $t$  aumenta, a imagem pelo logaritmo de base  $t$  do valor absoluto da nossa reta concentra-se numa vizinhança da origem e das 3 direções assintóticas (ver figuras 10c, 10d e 10e). E enquanto  $t$  tende para o infinito, vemos aparecer na figura 10f... uma reta tropical!

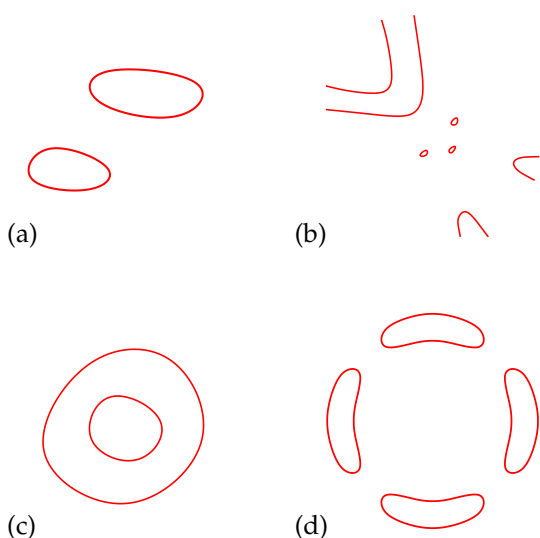


Figura 11: Algumas curvas algébricas reais de grau 4

### 5 Patchwork

A figura 10, quando lida da esquerda para a direita, explica-nos como passar de uma reta clássica no plano para uma reta tropical. A leitura dessa figura da direita para a esquerda é realmente muito mais interessante! Com efeito, vemos assim como construir uma reta clássica a partir de uma reta tropical. A técnica chamada de *patchwork* é uma generalização desta observação. Especificamente, ela fornece um método meramente combinatorio de construção de curvas algébricas reais a partir de curvas tropicais. Mas antes de explicar esse método em detalhe, voltamos um pouco no passado.

#### 5.1 O 16º problema de Hilbert

Uma *curva algébrica real plana* é uma curva do plano  $\mathbb{R}^2$  definida por uma equação da forma  $P(x, y) = 0$ , em que  $P(x, y)$  é um polinômio com coeficientes reais. As curvas algébricas reais de grau 1 e 2 são simples e bem conhecidas: as retas e as cônicas. Enquanto o grau de  $P(x, y)$  aumenta, o desenho realizado pela curva de equação  $P(x, y) = 0$  pode ser cada vez mais complexo. Para convencer-se, é suficiente dar uma olhada na figura 11, onde são representados alguns dos desenhos possíveis realizados por uma curva algébrica real de grau 4.

Um teorema de Axel Harnack, do fim do século XIX, afirma que uma curva algébrica real plana de grau  $d$  tem no máximo  $\frac{d(d-1)+2}{2}$  componentes conexas. Mas como estas componentes podem situar-se umas em relação às outras? Chamamos de *arranjo* de uma curva algébrica real plana a posição relativa das suas componentes conexas no plano. Em outras palavras, não nos interessamos pela posição exata da curva no plano, ape-

nas por seu desenho. Por exemplo, se uma curva tem duas componentes conexas limitadas, preocupamo-nos unicamente em saber se essas componentes estão fora uma da outra (ver figura 11a) ou não (ver figura 11c). Durante o segundo Congresso Internacional de Matemáticos, realizado em Paris, em 1900, David Hilbert enunciou a sua famosa lista dos 23 problemas para o século XX. A primeira parte do seu 16º problema pode ser compreendida na sua forma (muito) estendida do seguinte modo:

*Dado um número inteiro  $d$ , estabelecer a lista dos arranjos possíveis das curvas algébricas reais de grau  $d$ .*

No tempo de Hilbert, a resposta era conhecida para as curvas de grau no máximo 4. Apesar de progressos espetaculares nesse problema durante o século XX, devidos especialmente aos matemáticos da escola russa, numerosas perguntas permanecem ainda sem respostas<sup>7</sup>...

## 5.2 Curvas reais e curvas tropicais

Em geral é um problema difícil construir uma curva algébrica real de um grau dado que realiza um arranjo dado. Há mais de um século, os matemáticos propuseram numerosos e engenhosos métodos para esse problema. O patchwork, inventado por Oleg Viro nos anos 70, é um dos métodos atuais mais potentes. Nessa época a geometria tropical não existia ainda e Viro enunciou o seu teorema numa linguagem diferente da nossa aqui. Contudo, ele percebeu, no final dos anos 90, que o patchwork podia ser interpretado como uma *quantificação* das curvas tropicais. O patchwork é então ler a figura 10 da direita para a esquerda, ao invés de da esquerda para a direita. Graças a essa nova interpretação, Grigory Mikhalkin generalizou imediatamente o método de Viro original. Damos aqui uma versão simplificada do patchwork; o leitor interessado encontrará

<sup>7</sup> Um problema mais razoável e natural consiste em olhar os arranjos das componentes conexas das curvas algébricas reais projetivas singulares. Para esse problema mais restrito, a resposta é atualmente conhecida até o grau 7. É um teorema de Oleg Viro e o patchwork é um instrumento essencial da demonstração.

uma versão mais completa nas referências indicadas na seção final.

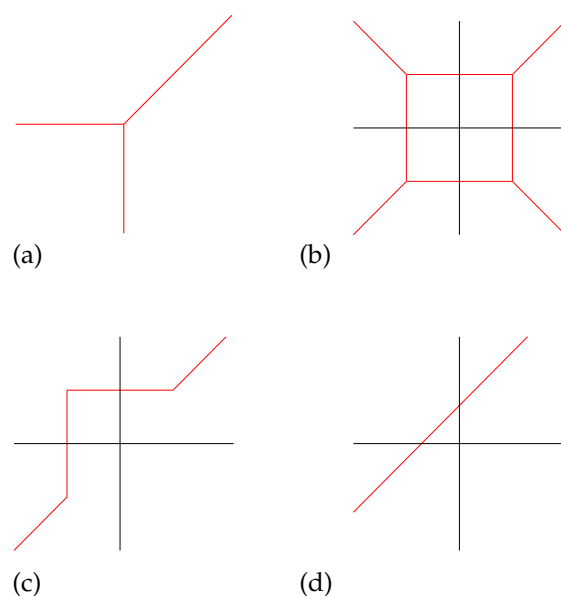


Figura 12: Patchwork de uma reta

Doravante, se  $a$  e  $b$  são dois números inteiros, denotamos por  $s_{a,b} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  a composta de  $a$  simetrias em relação ao eixo das abcissas com  $b$  simetrias em relação ao eixo das ordenadas. Assim só os valores módulo 2 de  $a$  e  $b$  são importantes,  $s_{0,0}$  é a função identidade,  $s_{1,0}$  é a simetria em relação ao eixo das abcissas,  $s_{0,1}$  é a simetria em relação ao eixo das ordenadas e  $s_{1,1}$  é a simetria em relação à origem.

Explicaremos agora em detalhe o procedimento do patchwork. Tomamos uma curva tropical  $C$  de grau  $d$  tendo apenas arestas de peso ímpar e tal que todos os polígonos da subdivisão dual são triângulos. Por exemplo, escolhamos a reta tropical da figura 12a. Para cada aresta  $e$  de  $C$ , escolhamos um vetor  $\vec{v}_e = (\alpha_e, \beta_e)$  diretor de  $e$ , com  $\alpha_e$  e  $\beta_e$  dois números inteiros primos entre si. Para a reta tropical, escolhamos os vetores  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(1, 1)$ . Agora consideramos que o  $\mathbb{R}^2$  no qual mora a nossa curva tropical é na realidade o quadrante positivo  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  de  $\mathbb{R}^2$  e tomamos a união da nossa curva tropical com as suas cópias simétricas em relação aos eixos. No caso da reta tropical, obtemos então a figura 12b. Para cada aresta  $e$  da nossa curva, apagamos  $e'$  e  $e''$ , duas das quatro cópias simétricas de  $e$ , de acordo com as duas regras seguintes:

- $e' = s_{\alpha_e, \beta_e}(e'')$ ,
- para cada vértice  $v$  de  $C$  adjacente às arestas  $e_1, e_2$  e  $e_3$  e para cada par  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  em  $\{0, 1\}^2$ , exatamente uma ou três das cópias  $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_1)$ ,  $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_2)$  e  $s_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}(e_3)$  são apagadas.

Chamamos o resultado de uma *curva tropical real*. Por exemplo se  $C$  é uma reta tropical, é possível apagar seis das cópias simétricas das arestas de  $C$  de acordo com estas duas regras para obter a reta tropical real representada na figura 12c. Mesmo se essa curva tropical real não é verdadeiramente uma reta, aquela realiza o mesmo arranjo que uma reta clássica no  $\mathbb{R}^2$  (ver figura 12d)! Isto não é casualidade, mas um teorema.

**Teorema 5.1** (O. Viro). *Qualquer curva tropical real de grau  $d$  realiza o mesmo arranjo que uma curva algébrica real de grau  $d$ .*

Queremos enfatizar a beleza e profundidade de tal enunciado! Com efeito, se uma curva tropical real constrói-se de acordo com regras combinatórias, então parece assemelhar-se a uma trapaça afirmar que ela possa ter uma relação qualquer com uma curva algébrica real! Não o faremos aqui, mas o teorema de Viro possibilita até mesmo determinar a equação de uma curva algébrica real que realiza o mesmo arranjo que uma curva tropical real dada. Utilizemos agora este teo-

rema para mostrar a existência de duas curvas algébricas reais, uma de grau 3 e a outra de grau 6.

Primeiramente, consideramos a curva tropical de grau 3 representado na figura 13a. Por uma escolha conveniente de arestas a apagar, as figuras 13b e 13c representam as duas etapas do procedimento do patchwork. Provamos então a existência de uma curva algébrica real de grau 3 semelhante ao desenho da figura 13d.

Para terminar, vamos considerar a curva tropical de grau 6 representada na figura 14a. Para uma escolha conveniente de arestas a apagar, o procedimento do patchwork dá a curva da figura 14c. Uma curva algébrica real de grau 6 que realiza o mesmo arranjo que essa curva tropical real foi inicialmente construída por Gudkov, de um jeito muito mais complicado, nos anos 60. Para contar uma anedota, Hilbert afirmava em 1900 que tal curva não podia existir...

### 5.3 Amebas

Se a dequantificação de uma reta é a ideia por trás do patchwork em sua maior generalidade, a prova do teorema de Viro é ligeiramente mais técnica para se escrever rigorosamente. Ficaremos satisfeitos em esboçar os contornos.

Em primeiro lugar, o corpo  $\mathbb{R}$  não sendo algebricamente fechado, devemos trabalhar não com curvas algébricas reais, mas mais geralmente com *curvas algébricas complexas*, isso é os subconjuntos de  $(\mathbb{C}^*)^2$  definidos por uma equação da forma  $P(x, y) = 0$ , onde  $P(x, y)$  é um polinômio com coeficientes complexos (que podem então ser reais). Para  $t$  um número real maior do que 1, define-se a aplicação  $\text{Log}_t$  sobre  $(\mathbb{C}^*)^2$  por

$$\begin{aligned} \text{Log}_t : (\mathbb{C}^*)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z, w) &\longmapsto (\log_t |z|, \log_t |w|) \end{aligned}$$

A imagem de uma curva algébrica de equação  $P(x, y) = 0$  pelo mapa  $\text{Log}_t$ , denotada por  $\mathcal{A}_t(P)$ , é chamada de *ameba de base  $t$*  da curva. O teorema seguinte fornece uma relação fundamental entre a geometria algébrica clássica e a geometria tropical: qualquer curva tropical é limite de amebas de curvas algébricas complexas.

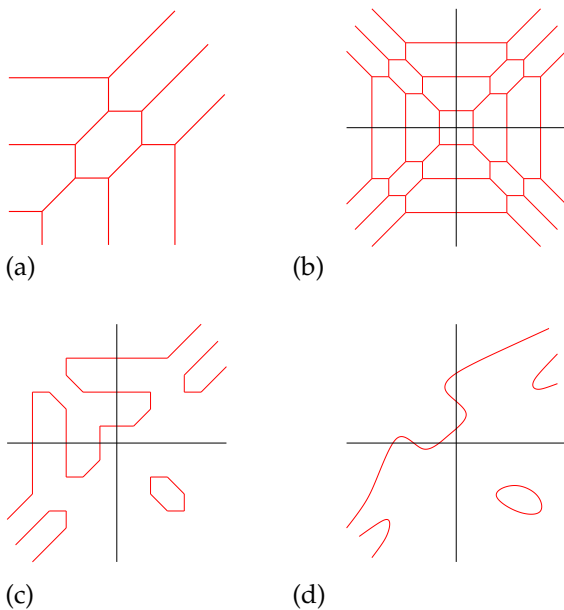


Figura 13: Patchwork de uma cúbica

**Teorema 5.2** (G. Mikhalkin, H. Rullgård). *Seja  $P_\infty(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$  um polinômio tropical e seja  $\alpha_{i,j}$  um número complexo não nulo para cada coeficiente  $a_{i,j}$  diferente de  $-\infty$ . Para qualquer  $t > 0$ , definimos o polinômio complexo  $P_t(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} t^{-a_{i,j}} x^i y^j$ . Então a ameba  $\mathcal{A}_t(P_t)$  converge para a curva tropical definida por  $P_\infty(x, y)$  quando  $t$  tende ao infinito.*

A dequantificação da reta vista na seção 4.2 é um caso particular deste enunciado: a ameba em base  $t$  da reta de equação  $t^0x - t^0y + t^01 = 0$  converge para a reta tropical definida por " $0x + 0y + 0$ ". Deduzimos o teorema de Viro do teorema acima observando, além de outras coisas, que se os  $\alpha_{i,j}$  são números reais, então as curvas definidas pelos polinômios  $P_t(x, y)$  são curvas algébricas reais.

### 5.4 Exercícios

1. *Construa uma curva tropical real de grau 2 que realiza o mesmo arranjo que uma hipérbole no  $\mathbb{R}^2$ . Mesma construção com uma parábola. Pode-se construir uma curva tropical real que realiza o mesmo arranjo que uma elipse?*
2. *Com ajuda do patchwork, mostre que existe uma curva algébrica real de grau 4 que realiza o arranjo da figura 11b. Poderá se inspirar na a construção ilustrada na figura 13.*
3. *Mostre que para qualquer grau  $d$ , existe uma curva algébrica real plana com  $\frac{d(d-1)+2}{2}$  componentes conexas.*

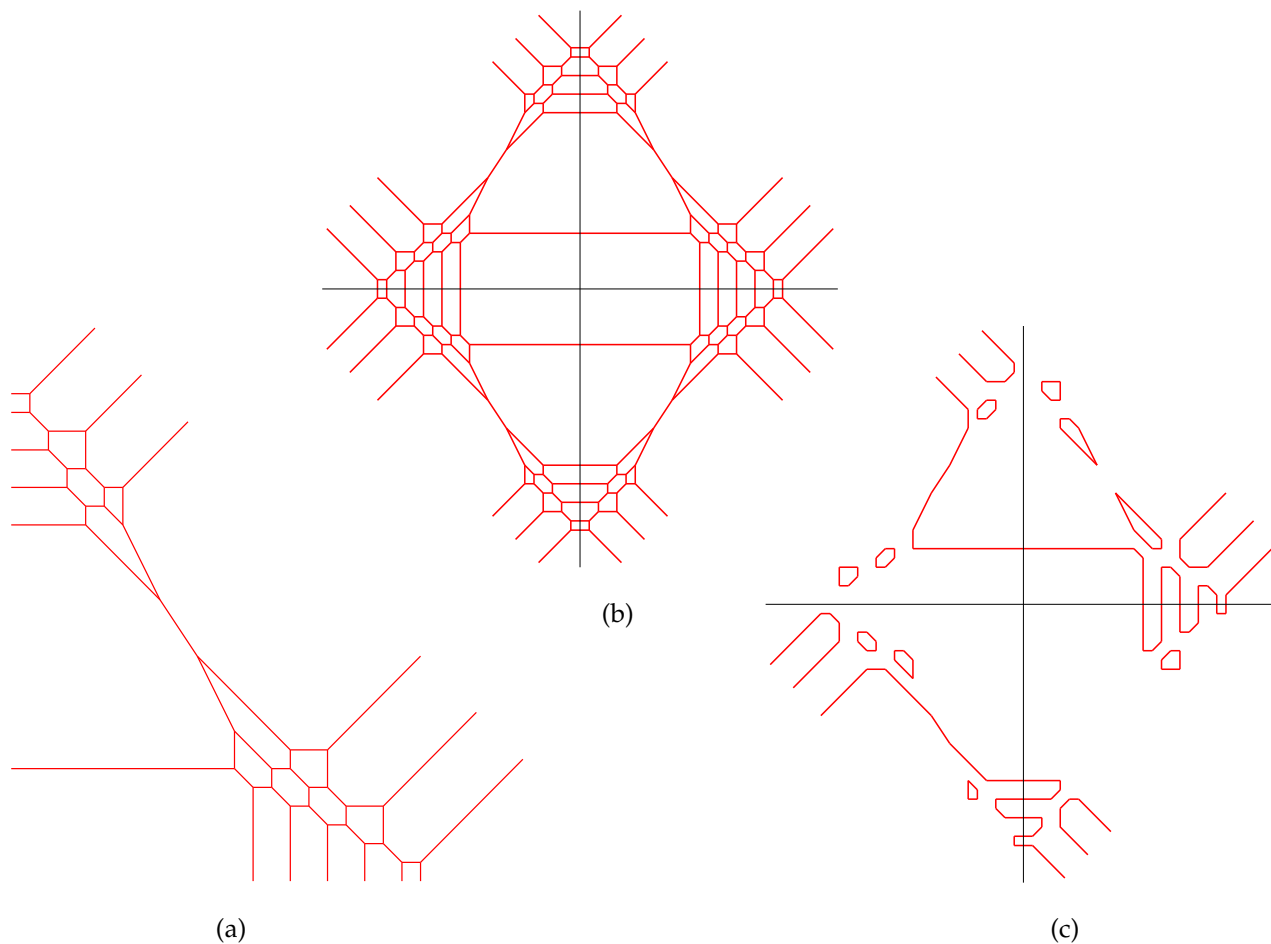


Figura 14: Curvas de Gudkov

## 6 Literatura

Para não afogar o leitor numa onda de referências mais ou menos acessíveis, indicamos apenas os textos de introdução à geometria tropical e às suas aplicações. Para referências mais especializadas, pode-se reportar às referências dos textos citados. Cuidado, alguns autores preferem utilizar o *mínimo* em vez do máximo na álgebra tropical!

As introduções à geometria tropical [2] e [7] dirigem-se a leitores com um conhecimento matemático mínimo. Os leitores mais experientes poderão igualmente ler as obras [6], [3] ou [1]. Para geometrias avançadas, aconselhamos os “estados da arte” [4] e [5]. Para saber mais sobre o 16º problema de Hilbert, o patchwork, a dequantificação de Maslov e as ameabas de curvas algébricas, indicamos os textos [9], [10] e [4], assim como o site [8].

Para terminar essa introdução à geometria tropical, acrescentamos que ela se aplica com sucesso em numerosas áreas da matemática, além do 16º problema de Hilbert. Citamos por exemplo a geometria enumerativa, a combinatória, a espelho-simetria, a biologia matemática...

## Referências

- [1] GATHMANN, A. Tropical algebraic geometry. *Jahresbericht Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, v. 108, n. 1, p. 3–32, 2006.
- [2] HARINCK, P.; PLAGNE, A.; SABBAH, C. (EDS.) *Géométrie tropicale: Journées Mathématiques X-UPS 2008*. Palaiseau: Les Editions de l’Ecole Polytechnique, 2008.
- [3] ITENBERG, I.; MIKHALKIN, G.; SHUSTIN, E. *Tropical algebraic geometry*. Basel: Birkhäuser, 2007. (Oberwolfach Seminars Series, 35)
- [4] MIKHALKIN, G. Amoebas of algebraic varieties and tropical geometry. In: DONALDSON, S.; ELIASBERG, Y.; GROMOV, M. (EDS.). *Different faces of geometry*. New York: Kluwer/Plenum, 2004. p.

257–300. (International Mathematical Series (New York), 3)

- [5] MIKHALKIN, G. Tropical geometry and its applications. In: INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS, v. 2. Invited lectures. *Proceedings*. Zurich: EMS, 2006. p. 827–852.
- [6] RICHTER-GEBERT, J.; STURMFELS, B.; THEOBALD, T. First steps in tropical geometry. In: LITVINOV, G. L.; MASLOV, V. P. (EDS.). *Idempotent mathematics and mathematical physics*. Providence: AMS, 2005. p. 289–317. (Contemporary Mathematics, 377)
- [7] SPEYER, D.; STURMFELS, B. Tropical mathematics. *Mathematics Magazine*, v. 82, n. 3, p. 163–173, 2009.
- [8] VIRO, O. *Patchworking*. Disponível em [www.pdmi.ras.ru/~olegviro/patchworking.html](http://www.pdmi.ras.ru/~olegviro/patchworking.html).
- [9] VIRO, O. Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper. In: EUROPEAN CONGRESS OF MATHEMATICS. Barcelona, 2000. *Proceedings*. Basel: Birkhäuser, 2001. v. 1. p. 135–146. (Progress in Mathematics, 201)
- [10] VIRO, O. From the sixteenth Hilbert problem to tropical geometry. *Japanese Journal of Mathematics*, v.3, n. 2, p. 181–214, 2008.

Erwan Brugallé  
brugalle@math.jussieu.fr

Éden Amorim - UFMG  
eden.amorim@gmail.com

Nicolas Puignau - UFRJ  
npuignau@ufrj.br