

EULER E RIEMANN VISITAM PICARD

Lia Feital Fusaro Abrantes

Jeanne Carmo Amaral

Armando G. M. Neves

UFMG

Certamente um dos mais importantes teoremas cuja demonstração se estuda nos cursos de matemática em níveis de graduação e mestrado é o Teorema de Picard. Tal teorema garante, sob condições bastante gerais e facilmente aplicáveis, existência e unicidade de soluções para problemas de valor inicial (PVI) de equações diferenciais ordinárias (EDOs). Devido ao grande número de aplicações das EDOs em vários ramos da ciência, o Teorema de Picard poderia ser considerado o *Teorema Fundamental da Matemática Aplicada*. A generalidade das hipóteses permite que aqueles que estudam aplicações de EDOs raramente tenham que se preocupar com questões de existência e unicidade.

Para o caso mais simples de EDOs de primeira ordem, o enunciado do teorema é o seguinte:

Teorema 1. *Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ contínua no aberto $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(t_0, x_0) \in U$ e $a > 0, b > 0$ tais que*

$$R_{ab} = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b] \subset U.$$

Se f é lipschitziana em relação à segunda variável em R_{ab} e $M > 0$ é uma cota superior para $|f|$ nesse compacto, então o PVI

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1)$$

possui solução única definida em $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, para $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$.

EDOs de ordens superiores podem ser sempre escritas como sistemas de EDOs de primeira ordem e são tratadas pela versão do teorema acima, com hipóteses semelhantes, para sistemas de EDOs (ver, por exemplo, [2], [3] ou [10]).

A prova mais conhecida do teorema de Picard, apresentada nos três livros acima citados, baseia-se no método das aproximações sucessivas, ou Teorema do Ponto Fixo de Banach (ver [6], por exemplo). Iremos apresentar, neste artigo, uma prova diferente, que encontramos em um livro de Ince ([7]) do início do século XX e, portanto, um pouco esquecida. Como o leitor irá perceber, a construção em que se baseia a prova que apresentaremos possui muita semelhança com a construção da integral de Riemann.

Não que a prova que apresentaremos seja melhor ou mais simples que a clássica e nem porque as ideias contidas na prova clássica sejam pouco importantes. O fato é que a prova do livro de Ince segue um caminho diferente e também bonito. Uma outra característica interessante da prova de Ince é que ela utiliza as poligonais de Euler, que são funções que aproximam a solução do PVI (1) e que foram introduzidas por Euler como o primeiro dentre os vários métodos numéricos para aproximar a solução de EDOs.

Em ordem cronológica, Euler viveu entre 1707 e 1783, Riemann entre 1826 e 1866 e Picard entre 1856 e 1941. Essas datas mostram quão impossível é o título deste artigo, mas a ideia é mesmo que Euler e Riemann façam uma visita simbólica a Picard, contribuindo um com sua poligonal e o outro com a construção da integral que hoje leva seu nome para provarem o teorema imortalizado com o nome de Picard. Para não cometer injustiças com outros grandes matemáticos, lembramos que o teorema objeto deste artigo está associado também aos nomes de Lindelöf (1870-1946), Lipschitz (1832-1903) e Cauchy (1789-1857). Para pouparmos ao anfitrião do teorema a lotação de sua casa com tanta gente ilustre, optamos por só colocar três nomes no título do artigo.

Com relação ao livro [7], aproveitamos a ideia da prova apenas esboçada por ele e a reescrevemos no estilo da matemática atual, complementando alguns detalhes. Nosso desejo inicial era que a prova ficasse aces-

sível a alunos que estivessem estudando pela primeira vez a construção da integral de Riemann, mas ao detalhar a prova acabamos usando também a noção de convergência uniforme a partir da Proposição 2. Acreditamos que o material deste artigo possa ser usado em disciplinas sobre EDOs em nível de final de graduação ou mestrado, como uma prova alternativa do Teorema de Picard. Ou, melhor ainda, em cursos de análise no nível de [8], [9] ou [4], como uma aplicação totalmente nova do maquinário usado na construção da integral de Riemann, assim como uma boa ilustração da utilidade dos resultados de convergência uniforme.

Poligonais superiores e inferiores

Sejam M e α como definidos no enunciado do Teorema 1. Dados $t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1}$ em $(t_0, t_0 + \alpha)$, define $t_N = t_0 + \alpha$. Vamos nos referir ao conjunto $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ como sendo uma partição de $[t_0, t_0 + \alpha]$. A norma de Π é definida como

$$|\Pi| = \max\{t_1 - t_0, t_2 - t_1, \dots, t_N - t_{N-1}\}.$$

Considere ainda o triângulo T como na figura, delimitado pelas retas $\{t = t_0 + \alpha\}$, $\{x = x_0 + M(t - t_0)\}$ e $\{x = x_0 - M(t - t_0)\}$. Definimos $T_1 \subset T$ como o triângulo delimitado pelas retas $\{x = x_0 + M(t - t_0)\}$, $\{x = x_0 - M(t - t_0)\}$ e $\{t = t_1\}$, e, em seguida,

$$M_1 = \max_{(t,x) \in T_1} f(t,x)$$

e

$$m_1 = \min_{(t,x) \in T_1} f(t,x).$$

Nesta construção, duas funções Y_Π e y_Π serão definidas em $[t_0, t_0 + \alpha]$. No intervalo $[t_0, t_1]$ elas ficam definidas por

$$Y_\Pi(t) = x_0 + M_1(t - t_0)$$

e

$$y_\Pi(t) = x_0 + m_1(t - t_0).$$

Definimos ainda $Y_1 = Y_\Pi(t_1)$ e $y_1 = y_\Pi(t_1)$.

Em seguida, definimos $T_2 \subset T$ como o trapézio delimitado pelas retas $\{t = t_1\}$, $\{x = Y_1 + M(t - t_1)\}$, $\{x = y_1 - M(t - t_1)\}$ e $\{t = t_2\}$, e, também,

$$M_2 = \max_{(t,x) \in T_2} f(t,x)$$

e

$$m_2 = \min_{(t,x) \in T_2} f(t,x).$$

Com essas definições podemos estender ao intervalo $[t_1, t_2]$ as funções Y_Π e y_Π já definidas em $[t_0, t_1]$. A definição dessas funções em $[t_1, t_2]$ é

$$Y_\Pi(t) = Y_1 + M_2(t - t_1)$$

e

$$y_\Pi(t) = y_1 + m_2(t - t_1).$$

Definimos ainda $Y_2 = Y_\Pi(t_2)$ e $y_2 = y_\Pi(t_2)$.

Indutivamente, para $i = 3, 4, \dots, N$, $T_i \subset T$ será o trapézio delimitado pelas retas $\{t = t_{i-1}\}$, $\{x = Y_{i-1} + M(t - t_{i-1})\}$, $\{x = y_{i-1} - M(t - t_{i-1})\}$ e $\{t = t_i\}$. Definiremos ainda

$$M_i = \max_{(t,x) \in T_i} f(t,x)$$

e

$$m_i = \min_{(t,x) \in T_i} f(t,x).$$

As funções Y_Π e y_Π já definidas em $[t_0, t_{i-1}]$ serão estendidas a $[t_{i-1}, t_i]$ por

$$Y_\Pi(t) = Y_{i-1} + M_i(t - t_{i-1})$$

e

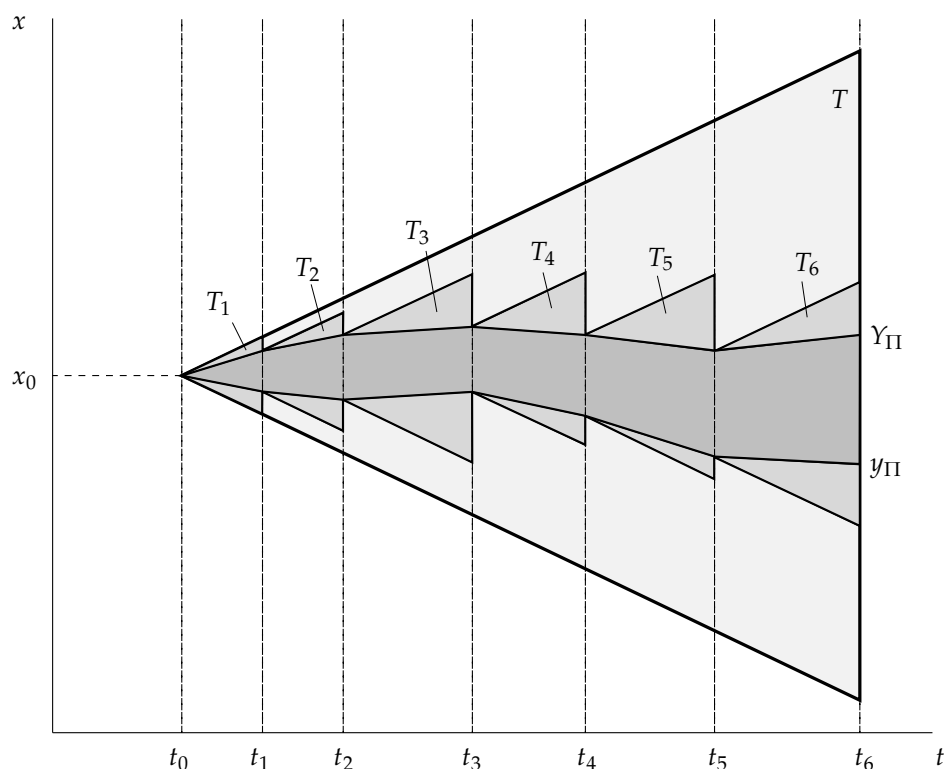
$$y_\Pi(t) = y_{i-1} + m_i(t - t_{i-1})$$

e, finalmente, $Y_i = Y_\Pi(t_i)$ e $y_i = y_\Pi(t_i)$.

Resumindo, temos uma função Y_Π definida em $[t_0, t_0 + \alpha]$ por meio de

$$Y_\Pi(t) = \begin{cases} x_0 + M_1(t - t_0); & t \in [t_0, t_1] \\ Y_1 + M_2(t - t_1); & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ Y_{N-1} + M_N(t - t_{N-1}); & t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases},$$

em que $Y_1 = x_0 + M_1(t_1 - t_0)$, $Y_2 = Y_1 + M_2(t_2 - t_1)$, \dots , $Y_{N-1} = Y_{N-2} + M_{N-1}(t_{N-1} - t_{N-2})$. Claramente, o gráfico de Y_Π é uma poligonal; chamaremos essa função Y_Π de *poligonal superior* para o PVI (1) definida pela partição Π . A razão desse nome ficará clara mais adiante. Analogamente, a *poligonal inferior* y_Π para o PVI



Construção das poligonais superior e inferior com relação a uma dada partição Π do intervalo $[t_0, t_0 + \alpha]$ com $N = 6$.

(1) definida pela partição Π é dada por

$$y_{\Pi}(t) = \begin{cases} x_0 + m_1(t - t_0); & t \in [t_0, t_1] \\ y_1 + m_2(t - t_1); & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ y_{N-1} + m_N(t - t_{N-1}); & t \in [t_{N-1}, t_N] \end{cases},$$

em que $y_1 = x_0 + m_1(t_1 - t_0)$, $y_2 = y_1 + m_2(t_2 - t_1)$, \dots , $y_{N-1} = y_{N-2} + m_{N-1}(t_{N-1} - t_{N-2})$. A construção feita até aqui está ilustrada na figura.

É claro que

$$y_{\Pi}(t) \leq Y_{\Pi}(t)$$

para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ e qualquer que seja a partição Π de $[t_0, t_0 + \alpha]$. Além do mais, se Π' é uma outra partição de $[t_0, t_0 + \alpha]$ que refina Π , isto é, se $\Pi' \supset \Pi$ como conjunto, então

$$Y_{\Pi}(t) \geq Y_{\Pi'}(t)$$

e

$$y_{\Pi}(t) \leq y_{\Pi'}(t)$$

para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Dessas duas propriedades segue que se Π_1 e Π_2 são partições quaisquer de $[t_0, t_0 + \alpha]$ então

$$y_{\Pi_1}(t) \leq Y_{\Pi_2}(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Para vê-lo, basta tomar $\Pi_{1,2} = \Pi_1 \cup \Pi_2$, que é obviamente refinamento tanto de Π_1 quanto de Π_2 . Logo

$$y_{\Pi_1}(t) \leq y_{\Pi_{1,2}}(t) \leq Y_{\Pi_{1,2}}(t) \leq Y_{\Pi_2}(t),$$

para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Daí segue que existem, para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, os números reais

$$y(t) = \sup_{\Pi \in \mathcal{P}} y_{\Pi}(t)$$

e

$$Y(t) = \inf_{\Pi \in \mathcal{P}} Y_{\Pi}(t),$$

em que \mathcal{P} é o conjunto de todas as partições de $[t_0, t_0 + \alpha]$. As funções y e Y definidas acima no domínio $[t_0, t_0 + \alpha]$ satisfazem

$$y(t) \leq Y(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha],$$

e são denominadas, respectivamente, de *solução inferior* e *solução superior* do PVI (1).

Observe a analogia entre as poligonais superiores e inferiores aqui definidas e as somas de Riemann superiores e inferiores na construção da integral de Riemann (veja, por exemplo, o capítulo IX de [8], ou o capítulo 10 de [9], ou ainda o capítulo 5 de [4]). Da mesma forma, as soluções superior e inferior do PVI (1) são análogas às integrais superior e inferior de uma função.

Com a construção feita acima, a estratégia para provar o Teorema 1 será mostrar que se f satisfaz às condições do teorema então $y(t) = Y(t)$ para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Esse resultado é alcançado na Proposição 1 e é o análogo do Teorema 6 do capítulo IX de [8], ou Teorema 5 do Capítulo 10 de [9] ou Teorema 5.4 de [4]. E se ϕ denota a função definida em $[t_0, t_0 + \alpha]$ como o valor comum de y e Y , provaremos em seguida, na Proposição 3, que ϕ é uma solução do PVI (1). Um argumento padrão, que reproduzimos aqui por completudeza, prova que essa solução é a única solução de (1) em $[t_0, t_0 + \alpha]$. Isso está na Proposição 4. Finalmente, um argumento completamente análogo vale para construir a solução do PVI (1) no intervalo $[t_0 - \alpha, t_0]$.

Vale ainda observar que as soluções inferior e superior foram construídas apenas com a hipótese de limitação da f , não sendo até agora necessário usar sua continuidade e, muito menos, a hipótese de ser Lipschitz na segunda variável.

Igualdade entre soluções superiores e inferiores

Para provar a igualdade das soluções superior e inferior, o primeiro passo é o seguinte lema.

Lema 1. *Sejam $\rho \in \mathbb{R}$ e h_1, \dots, h_N números reais positivos, com $N \in \mathbb{N}$ arbitrário. Se K é uma constante positiva e os números d_0, d_1, \dots, d_N são tais que vale*

$$d_i \leq d_{i-1}(1 + Kh_i) + \rho h_i, \quad (2)$$

para qualquer $i = 1, 2, \dots, N$, então

$$d_i \leq d_0 e^{K \sum_{j=1}^i h_j} + \frac{\rho}{K} (e^{K \sum_{j=1}^i h_j} - 1), \quad (3)$$

para qualquer $i = 1, 2, \dots, N$.

Demonstração. De (2) segue que

$$d_i + \frac{\rho}{K} \leq (d_{i-1} + \frac{\rho}{K})(1 + Kh_i).$$

Como $1 + Kh_i < e^{Kh_i}$ para todo $K > 0$, temos que

$$d_i + \frac{\rho}{K} \leq (d_{i-1} + \frac{\rho}{K})e^{Kh_i}. \quad (4)$$

Aplicando (4) repetidas vezes, temos que

$$\begin{aligned} d_i + \frac{\rho}{K} &\leq (d_{i-1} + \frac{\rho}{K})e^{Kh_i} \\ &\leq (d_{i-2} + \frac{\rho}{K})e^{K(h_i+h_{i-1})} \\ &\vdots \\ &\leq (d_0 + \frac{\rho}{K})e^{K \sum_{j=1}^i h_j}. \end{aligned}$$

Rearranjando, obtemos (3). □

A igualdade das soluções superior e inferior será então consequência simples da seguinte proposição.

Proposição 1. *Suponha f como nas hipóteses do Teorema 1. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\Pi \in \mathcal{P}$ satisfaz $|\Pi| < \delta$ então*

$$Y_{\Pi}(t) - y_{\Pi}(t) < \epsilon$$

para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Demonstração. A hipótese de que f é lipschitziana em relação à segunda variável significa que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(t, x) - f(t, x^*)| \leq K|x - x^*|,$$

para quaisquer $(t, x), (t, x^*) \in R_{ab}$. Dado $\epsilon > 0$, tome $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda < \frac{\epsilon K}{2(e^{K\alpha} - 1)}.$$

Como f é contínua no compacto R_{ab} , segue que f é uniformemente contínua nesse compacto. Em particular existe $\sigma > 0$ tal que se $(t, x), (t^*, x) \in R_{ab}$ com $|t - t^*| \leq \sigma$ então $|f(t, x) - f(t^*, x)| < \lambda$. Seja $\delta = \min\{\sigma, \frac{\lambda}{2MK}\}$, onde M é cota superior para $|f(t, x)|$ em R_{ab} , como no enunciado do Teorema 1.

Tomemos uma partição $\Pi \in \mathcal{P}$ qualquer com $|\Pi| < \delta$ e definamos as regiões T_1, T_2, \dots, T_N como anteriormente, junto com toda a notação necessária. Observe que em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ da partição a diferença $Y_{\Pi}(t) - y_{\Pi}(t)$ tem derivada constante e igual a $M_i - m_i$,

que é um número não negativo. Portanto essa diferença é uma função não decrescente em $[t_0, t_N]$ e bastará mostrarmos que $Y_{\Pi}(t_N) - y_{\Pi}(t_N) < \epsilon$.

Definimos

$$d_i = Y_{\Pi}(t_i) - y_{\Pi}(t_i),$$

para $i = 0, 1, \dots, N$. Temos

$$d_i = d_{i-1} + (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}), \quad (5)$$

para todo $i = 1, \dots, N$, o que será usado para mostrar que $d_N < \epsilon$.

Para tanto, temos que avaliar a diferença $M_i - m_i$, usando a continuidade uniforme na variável t e a constante de Lipschitz na variável x . Sejam (t_i^1, x_i^1) e (t_i^2, x_i^2) as coordenadas de dois pontos da região T_i em que o máximo e o mínimo de f restrita a T_i são atingidos. Já que $|t_i^1 - t_i^2| \leq \sigma$, temos que

$$\begin{aligned} M_i - m_i &= f(t_i^1, x_i^1) - f(t_i^2, x_i^2) \\ &= \left(f(t_i^1, x_i^1) - f(t_i^2, x_i^1) \right) + \left(f(t_i^2, x_i^1) - f(t_i^2, x_i^2) \right) \\ &\leq \lambda + K \left| x_i^1 - x_i^2 \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Podemos obter

$$\left| x_i^1 - x_i^2 \right| \leq d_{i-1} + 2M(t_i - t_{i-1}),$$

subtraindo

$$y_{i-1} - M(t_i^1 - t_{i-1}) \leq x_i^1 \leq Y_{i-1} + M(t_i^1 - t_{i-1})$$

de

$$y_{i-1} - M(t_i^2 - t_{i-1}) \leq x_i^2 \leq Y_{i-1} + M(t_i^2 - t_{i-1}).$$

E, como $t_i - t_{i-1} \leq \frac{\lambda}{2MK}$, então, por (6),

$$\begin{aligned} M_i - m_i &\leq \lambda + 2MK(t_i - t_{i-1}) + Kd_{i-1} \\ &\leq 2\lambda + Kd_{i-1}. \end{aligned}$$

Usando essa cota em (5) obtemos

$$d_i \leq d_{i-1}(1 + K(t_i - t_{i-1})) + 2\lambda(t_i - t_{i-1}),$$

para $i = 1, 2, \dots, N$.

Aplicando o Lema 1 para $h_i = t_i - t_{i-1}$, $\rho = 2\lambda$, e levando em conta que $d_0 = 0$, ficamos com

$$d_i \leq \frac{2\lambda}{K} \left(e^{K(t_i - t_0)} - 1 \right).$$

Em particular,

$$d_N \leq \frac{2\lambda}{K} \left(e^{K\alpha} - 1 \right) < \epsilon.$$

□

Poligonais de Euler e a solução do PVI

Seja então $\phi : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(t) = y(t) = Y(t)$. Vamos provar com os próximos resultados que ϕ é solução do PVI (1). Para tanto, obteremos uma proposição sobre somas de Riemann e funções integráveis à Riemann.

Recordemos alguns conceitos. Dada uma função $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e uma partição $\Pi = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b\}$ do intervalo $[a, b]$, definimos as somas inferior

$$\underline{S}(\psi; \Pi) = \sum_{i=1}^N \left(\inf_{[t_{i-1}, t_i]} \psi \right) \cdot (t_i - t_{i-1})$$

e superior

$$\bar{S}(\psi; \Pi) = \sum_{i=1}^N \left(\sup_{[t_{i-1}, t_i]} \psi \right) \cdot (t_i - t_{i-1}),$$

bem como as integrais inferior $\sup_{\Pi} \underline{S}(\psi; \Pi)$ e superior $\inf_{\Pi} \bar{S}(\psi; \Pi)$ de ψ . Dizemos que ψ é *integrável à Riemann* se as integrais inferior e superior coincidem. Neste caso, esse valor é definido como a integral de ψ e é denotado por $\int_a^b \psi(t) dt$.

É fácil encontrar exemplos de funções integráveis à Riemann: se o domínio é um intervalo fechado, toda função contínua é integrável (ver [8], [9] ou [4]). E é isto o que vamos usar adiante.

Uma *soma de Riemann de f relativa a Π* é qualquer soma do tipo

$$S = \sum_{i=1}^N \psi(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}),$$

em que $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$, $\forall i = 1, \dots, N$. Sabemos (ver as referências mencionadas acima, por exemplo) que se ψ é integrável à Riemann, $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots\}$ é uma sequência de partições com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Pi_n| = 0$ e S_n é uma soma de Riemann de ψ relativa a Π_n , $\forall n \geq 1$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \psi(t) dt$.

A seguinte proposição generaliza esse resultado.

Proposição 2. *Sejam $\psi, \psi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis à Riemann, $\forall n \geq 1$, com $\psi_n \rightarrow \psi$ uniformemente¹. Sejam Π_n partições de $[a, b]$ com $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Pi_n| = 0$ e, para cada $n \geq 1$, seja S_n uma soma de Riemann de ψ_n relativa à partição Π_n . Então,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \psi(t) dt.$$

Demonstração. Suponha que $\Pi_n = \{t_0, t_1, \dots, t_{N_n}\}$. Então S_n é da forma

$$S_n = \sum_{i=1}^{N_n} \psi_n(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}),$$

em que $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

Considere a soma de Riemann particular de ψ com relação a Π_n obtida com as mesmas escolhas $\bar{t}_i \in [t_{i-1}, t_i]$ usadas em S_n , ou seja, a soma S_n^* dada por

$$S_n^* = \sum_{i=1}^{N_n} \psi(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}).$$

Fixado $\epsilon > 0$, a integrabilidade de ψ implica que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| S_n^* - \int_a^b \psi(t) dt \right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

para $n \geq n_1$. Por outro lado, como $\psi_n \rightarrow \psi$ uniformemente em $[a, b]$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

para cada $t \in [a, b]$ e $n \geq n_2$. Logo

$$\begin{aligned} |S_n - S_n^*| &= \left| \sum_{i=1}^{N_n} \psi_n(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N_n} \psi(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{N_n} |\psi_n(\bar{t}_i) - \psi(\bar{t}_i)| (t_i - t_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{N_n} \frac{\epsilon}{2(b-a)} (t_i - t_{i-1}) = \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Assim concluímos que, para $n \geq \max\{n_1, n_2\}$,

$$\begin{aligned} |S_n - \int_a^b \psi(t) dt| &\leq |S_n - S_n^*| + |S_n^* - \int_a^b \psi(t) dt| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

¹ De fato, não é preciso supor que ψ seja integrável, pois isso segue da integrabilidade das funções ψ_n e da convergência uniforme.

Se $\Pi = \{t_0 < t_1 < \dots < t_N = t_0 + \alpha\}$ é partição qualquer de $[t_0, t_0 + \alpha]$, definimos agora a *poligonal de Euler* relativa ao PVI (1) e à partição Π como sendo a função $\phi_\Pi : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ em que $\phi_\Pi(t)$ é dada por

$$\begin{cases} x_0 + f(t_0, x_0)(t - t_0); & t \in [t_0, t_1] \\ x_1 + f(t_1, x_1)(t - t_1); & t \in [t_1, t_2] \\ \vdots \\ x_{N-1} + f(t_{N-1}, x_{N-1})(t - t_{N-1}); & t \in [t_{N-1}, t_0 + \alpha] \end{cases} \quad (7)$$

em que x_1, x_2, \dots, x_{N-1} são definidos por $x_1 = x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0)$, $x_2 = x_1 + f(t_1, x_1)(t_2 - t_1)$, \dots , $x_{N-1} = x_{N-2} + f(t_{N-2}, x_{N-2})(t_{N-1} - t_{N-2})$.

É claro que para toda partição $\Pi \in \mathcal{P}$ e para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ temos

$$y_\Pi(t) \leq \phi_\Pi(t) \leq Y_\Pi(t).$$

Além do mais, se na partição Π temos $t \in [t_{j-1}, t_j]$, então

$$\begin{aligned} \phi_\Pi(t) &= x_0 + f(t_0, x_0)(t_1 - t_0) \\ &\quad + f(t_1, x_1)(t_2 - t_1) + \dots + f(t_{j-1}, x_{j-1})(t - t_{j-1}). \end{aligned} \quad (8)$$

Considere agora $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots\}$ sequência de partições de $[t_0, t_0 + \alpha]$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} |\Pi_k| \rightarrow 0$ e defina as sequências (y_k) , (Y_k) e (ϕ_k) como

$$y_k = y_{\Pi_k}, Y_k = Y_{\Pi_k}, \phi_k = \phi_{\Pi_k}.$$

Da Proposição 1 segue facilmente o seguinte corolário.

Corolário 1. *Se f satisfaz às condições do teorema de existência e unicidade, então, quando $k \rightarrow \infty$, $y_k \rightarrow \phi$, $Y_k \rightarrow \phi$ e $\phi_k \rightarrow \phi$, sendo que todas essas convergências são uniformes. Além disso, ϕ é contínua.*

Demonstração. Todas as diferenças $|y_k - \phi|$, $|Y_k - \phi|$ e $|\phi_k - \phi|$ são limitadas por $|Y_k - y_k|$, que por sua vez tende uniformemente para zero, conforme a Proposição 1. A continuidade de ϕ segue diretamente do fato de que é o limite uniforme de funções contínuas. □

Agora estamos prontos para demonstrar que ϕ é solução do PVI (1).

Proposição 3. *ϕ é solução do PVI (1).*

Demonstração. Considere mais uma vez a sequência $\{\Pi_1, \Pi_2, \dots\}$ de partições de $[t_0, t_0 + \alpha]$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} |\Pi_k| = 0$ e $\phi_k \equiv \phi_{\Pi_k}$ as correspondentes poligonais de Euler relativas ao PVI (1). Defina $\psi_k : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi_k(t) = f(t, \phi_k(t))$$

e $\psi : [t_0, t_0 + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi(t) = f(t, \phi(t)).$$

Como f é contínua e ϕ também o é, pelo Corolário 1, então ψ é contínua e, portanto, integrável à Riemann. Além disso, usando que f é Lipschitz na segunda variável,

$$\begin{aligned} |\psi_k(t) - \psi(t)| &= |f(t, \phi_k(t)) - f(t, \phi(t))| \\ &\leq K|\phi_k(t) - \phi(t)| \end{aligned}$$

e, uma vez que $\phi_k \rightarrow \phi$ uniformemente (pelo Corolário 1), resulta que $\psi_k \rightarrow \psi$ uniformemente.

Seja $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Na partição $\Pi_k = \{t_0 \equiv t_0^k, t_1^k, t_2^k, \dots, t_0 + \alpha\}$, t estará em um subintervalo da forma $[t_{j_k-1}^k, t_{j_k}^k]$ para algum $j_k \in \mathbb{N}$. Considere a soma de Riemann $S_k(t)$ de ψ_k no intervalo $[t_0, t]$ dada por

$$S_k(t) = \sum_{i=1}^{j_k-1} \psi_k(t_{i-1}^k)(t_i^k - t_{i-1}^k) + \psi_k(t_{j_k-1}^k)(t - t_{j_k-1}^k).$$

Pela Proposição 2,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(t) = \int_{t_0}^t \psi(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} S_k(t) &= f(t_0, \phi_k(t_0))(t_1^k - t_0) + f(t_1^k, \phi_k(t_1^k))(t_2^k - t_1^k) \\ &\quad + \dots + f(t_{j_k-1}^k, \phi_k(t_{j_k-1}^k))(t - t_{j_k-1}^k) \\ &= f(t_0, x_0)(t_1^k - t_0) + f(t_1^k, x_1^k)(t_2^k - t_1^k) \\ &\quad + \dots + f(t_{j_k-1}^k, x_{j_k-1}^k)(t - t_{j_k-1}^k) \\ &= \phi_k(t) - x_0, \end{aligned}$$

em que na última igualdade fizemos uso de (8).

Portanto, tomando o $\lim_{k \rightarrow \infty}$ de ambos os lados,

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Do teorema fundamental do cálculo segue imediatamente que ϕ é solução do PVI (1). \square

Proposição 4. Se f satisfaz às condições do teorema e o PVI (1) possui solução, então essa solução é única.

Demonstração. Sejam ϕ_1 e ϕ_2 soluções do PVI (1). É fácil ver que ambas devem satisfazer

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \phi(s)) ds.$$

Daí,

$$\begin{aligned} |\phi_1(t) - \phi_2(t)| &= \left| \int_{t_0}^t (f(s, \phi_1(s)) - f(s, \phi_2(s))) ds \right| \\ &\leq K \int_{t_0}^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds, \end{aligned}$$

em que K é uma constante de Lipschitz para f .

Seja $U(t) = \int_{t_0}^t |\phi_1(s) - \phi_2(s)| ds$, $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Então U é diferenciável em $[t_0, t_0 + \alpha]$. A desigualdade acima mostra que $U'(t) - KU(t) \leq 0$, $\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Multiplicando membro a membro por e^{-Kt} , temos

$$\frac{d}{dt}(e^{-Kt}U(t)) = e^{-Kt}U'(t) - Ke^{-Kt}U(t) \leq 0,$$

para todo $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, resultando que $e^{-Kt}U(t)$ é não crescente nesse intervalo.

Por outro lado, de sua definição, temos que $U(t) \geq 0$ $\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]$ e $U(t_0) = 0$. Isso só é compatível com o não crescimento de $e^{-Kt}U(t)$ se $U(t) \equiv 0$, provando a unicidade. \square

Comentários finais

Sabemos que o Teorema 1 continua válido com o mesmo enunciado, mas com $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $R_{ab} = [t_0 - a, t_0 + a] \times B(x_0, b) \subset U$, sendo $B(x_0, b)$ a bola fechada de \mathbb{R}^n com centro x_0 e raio b (veja [2, 3, 10]). Em outras palavras, o teorema vale para sistemas de EDOs de primeira ordem e portanto também para EDOs de ordens superiores. Para simplificar o texto ao máximo, não quisemos estender a construção e a demonstração dadas de modo a englobar esse caso muito mais geral. Acreditamos que as mesmas ideias que delineamos aqui podem ser usadas para esse caso. Fica então o convite ao leitor que, como um bom exercício, o faça por si.

O Corolário 1 diz que uma sequência de poligonais de Euler construídas a partir de partições Π_n com

$|\Pi_n| \rightarrow 0$ converge uniformemente à solução do PVI (1). Isto significa que uma poligonal de Euler construída com uma partição com norma suficientemente pequena é uma boa aproximação (no sentido da convergência uniforme) para a solução de um PVI. Estamos falando portanto de métodos numéricos para aproximar soluções de PVIs para EDOs.

A construção de poligonais de Euler é bastante simples do ponto de vista computacional e é conhecida como o *método de Euler* para a aproximação numérica de soluções para PVIs. O Corolário 1 e a Proposição 3 são a justificativa matemática para o “funcionamento” do método de Euler, o mais simples dos métodos aproximados para resolução de EDOs. O assunto de métodos numéricos para equações diferenciais ordinárias ou parciais foi somente levemente arranhado neste artigo, mas o leitor fica convidado a explorá-lo em maior profundidade em um dos vários livros a respeito, por exemplo [1] para uma rápida introdução, ou [5] para algo mais aprofundado. Nosso Lema 1 é um resultado básico da área.

Apesar de o método de Euler ser bastante “primitivo” com relação aos demais métodos numéricos para equações diferenciais, é interessante notar que ele foi utilizado como “motor” de uma das mais importantes demonstrações realizadas por computador dos últimos tempos, a da existência do atrator de Lorenz ([11]).

Referências

- [1] BOYCE, W.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.
- [2] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2005. (Coleção Matemática Universitária, 15)
- [3] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. *Equações diferenciais aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2002. (Coleção Matemática Universitária, 6)
- [4] FIGUEIREDO, D. G. *Análise I*. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.
- [5] GOLUB, G. H.; ORTEGA, J. M. *Scientific computing and differential equations: an introduction to numerical methods*. San Diego: Academic Press, 1992.
- [6] HÖNIG, C. S. *Aplicações da topologia à análise*. Rio de Janeiro: IMPA, 1976. (Coleção Projeto Euclides, 3)
- [7] INCE, E. L. *Ordinary differential equations*. New York: Dover, 1944.
- [8] LIMA, E. L. *Curso de análise, vol. 1*. 12. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. (Coleção Projeto Euclides, 1)
- [9] LIMA, E. L. *Análise real, vol. 1*. 10. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. (Coleção Matemática Universitária, 1)
- [10] SOTOMAYOR, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Coleção Projeto Euclides, 11)
- [11] TUCKER, W. The Lorenz attractor exists. *Comptes Rendus de L'Académie des Sciences, Series I, Mathematics*, v. 328, n. 12, p. 1197–1202, 1999.

Armando G. M. Neves
 UFMG - Depto. de Matemática
 aneves@mat.ufmg.br
www.mat.ufmg.br/~aneves

Lia Feital Fusaro Abrantes
 Bolsista de doutorado da UFMG (CNPq)
 liafeital@yahoo.com.br

Jeanne Carmo Amaral
 Bolsista de doutorado da UFMG (CAPES - REUNI)
 jeannecarmo@yahoo.com.br