Abaixo publicamos algumas questões do nível universitário da Olimpíada Brasileira de Matemática, de 2009, tanto da primeira quanto da segunda fase.

Questões da primeira fase

1. (a) Encontre o valor mínimo da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{(x/e)} - x$, em que $e = 2,71828\ldots$ é a base do logaritmo natural.

(b) Qual destes números é maior: e^{π} ou π^{e}?

2. Seja $\zeta \in \mathbb{C}$ uma raiz de $x^7 - 1$, com $\zeta \neq 1$. Existe um polinômio mônico p de grau 2 com coeficientes inteiros cujas raízes são os números $z_1 = \zeta + \zeta^2 + \zeta^4$ e $z_2 = \zeta^3 + \zeta^5 + \zeta^6$. Calcule $p(3)$.

3. A rã Dõ descansa sobre o vértice A de um triângulo equilátero ABC. A cada minuto a rã salta do vértice em que está para o vértice adjacente, com probabilidade p de o salto ser no sentido horário e $1 - p$ de ser no sentido anti-horário, em que $p \in (0,1)$ é uma constante. Seja P_n a probabilidade de, após n saltos, Dõ estar novamente no vértice A.

(a) Prove que, qualquer que seja $p \in (0,1)$, $\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{1}{3}$.

(b) Prove que existe $p \in (0, \frac{1}{100})$ tal que, para algum $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \frac{1}{\pi}$.

4. Determine a quantidade de números inteiros positivos n menores ou iguais a 31! tais que $3^n + n$ é divisível por 31.

Questões da segunda fase

5. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ crescente, derivável e inversível. Se $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, prove que existem dois reais diferentes a e b do intervalo $[0,1]$ tais que $f'(a) = f'(b) = 1$. *Obs:* f^{-1} denota a inversa da função f.

6. Seja $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\ldots\}$. Dados conjuntos $A, B \subset \mathbb{N}$, para cada inteiro positivo n denote por $r(A,B,n)$ o número de soluções da equação $a + b = n$, $a \in A$, $b \in B$. Prove que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $r(A,B,n+1) > r(A,B,n)$ para todo $n > n_0$ se e somente se $\mathbb{N} \setminus A$ e $\mathbb{N} \setminus B$ são finitos.

7. Dados $n, a_1, a_2, \ldots, a_n$ inteiros positivos, definimos $q_0 = 1$, $q_1 = a_1$ e $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1}$, para $1 \leq k \leq n-1$. Prove que, dado $c > 1$, existe $K > 0$ tal que, para todo $M > K$, existem n inteiro positivo e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pertencentes a $\{1,2\}$ tais que $M \leq q_n < c \cdot M$.

8. Seja H o hiperboloide de equação $3x^2 + 3y^2 - z^2 - 1 = 0$.

(a) Prove que todo ponto $(x,y,z) \in H$ pertence a exatamente duas retas contidas em H.

(b) Prove que todas as retas contidas em H formam o mesmo ângulo com o plano de equação $z = 0$, e determine esse ângulo.

9. Ache todas as funções $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ que simultaneamente satisfazem

(a) $f(f(n)) = f(n+1)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e

(b) $f(2009n + 2008) = 2009f(n)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

O problema abaixo foi sugerido por Artur Avila. Embora relativamente elementar, este resultado foi importante em seu trabalho recente de pesquisa sobre renormalização.

10. Sejam $B = \{p \in \mathbb{R}^n, |p| < 1\}$ a bola unitária de $\mathbb{R}^n$ e $f : B \to B$ uma função de classe C^1 tal que $f \circ f = f$ e existe $c < 1$ com $|f(p)| < c$ para todo $p \in B$. Prove que f é constante.