

NÚMEROS DE SAGAN

José Ricardo G. Mendonça¹

Em sua novela *Contact* ([26]), o astrônomo e divulgador científico norte-americano Carl E. Sagan (1934-1996) conta a história da Dra. Eleanor Ann Arroway, uma astrofísica brilhante que, em sua busca por vida extraterrestre inteligente – uma busca que o próprio C. Sagan realizou intensamente em sua vida –, identifica uma mensagem de Vega, a estrela mais brilhante (estrela α) da constelação de Lira, a cerca de 25,3 anos-luz (aproximadamente 239,4 trilhões de quilômetros) de nosso Sol. Ao ser decodificada, a mensagem instrui para a construção de um veículo de cinco lugares que, supostamente, deve levar seus ocupantes para Vega. Após diversos contratemplos científicos, tecnológicos e políticos, a máquina é finalmente construída e a Dra. Arroway, junto de outros quatro colegas, viaja pela Via Láctea através de diversos tipos de passagens espaciotemporais (buracos-de-minhoca e possivelmente outros tipos de estruturas exóticas do espaço-tempo) ao encontro dos remetentes da mensagem.

No encontro, várias questões acerca do significado da vida e do Universo são debatidas. Em um diálogo notável, Dra. Arroway pergunta ao ser com o qual ela se encontrou como eram suas experiências místicas. Citando Sagan ([26]):²

“I want to know about your myths, your religions. What fills you with awe? Or are those who make the numinous unable to feel it?”

“(...) Certainly we feel it. (...) I don’t say this is it exactly, but it’ll give you a flavor of our numinous. It concerns pi, the ratio of the circumference of a

circle to its diameter. (...) Our mathematicians have made an effort to calculate it out to... none of you seem to know... Let’s say the ten-billionth place. You won’t be surprised to hear that other mathematicians have gone further. Well, eventually – let’s say it’s in the ten-to-the-twentieth-power place – something happens. The randomly varying digits disappear, and for an unbelievably long time there’s nothing but ones and zeros.”

“And the zeros and ones finally stop? You get back to a random sequence of digits? And the number of zeros and ones? Is it a product of prime numbers?”

“Yes, eleven of them.”

“You’re telling me there’s a message in eleven dimensions hidden deep inside the number pi? Someone in the Universe communicates by... mathematics? (...) Mathematics isn’t arbitrary. I mean pi has to have the same value everywhere. How can you hide a message inside pi? It’s built into the fabric of the Universe.”

“Exactly.”

Após seu retorno para a Terra, e após mais alguns contratemplos mas também alguma glória, Dra. Arroway acaba por estabelecer um amplo programa para a busca de vida extraterrestre inteligente. Um dos projetos do programa consiste em disponibilizar enormes recursos computacionais para calcular π em várias bases até que alguma anomalia nos dígitos seja percebida. Certo dia, os computadores começam a apitar freneticamente: depois de alcançar mais de 10^{20} dígitos depois da vírgula na expansão de π na base 11 – que, não por coincidência, é a dimensionalidade do espaço-tempo segundo as modernas teorias das supercordas ([17, 27]) –, o programa percebe um padrão especial contíguo de 0’s e 1’s que quando arranjados em um quadrado de dimensões específicas forma um círculo:

¹ O autor é doutor em física e atua como consultor em gestão de projetos de P&D em São Paulo.

² Citamos o texto original em inglês extraído da edição que possuímos. Existe uma edição em português deste livro, assim como das referências [1, 2, 16, 17].

The program reassembled the digits into a square raster, an equal number across and down. The first line was an uninterrupted file of zeros, left to right. The second line showed a single numeral one, exactly in the middle, with zeros to the borders, left and right. After a few more lines, an unmistakable arc had formed, composed of ones. The simple geometrical figure had been quickly constructed, line by line, self-reflexive, rich with promise. The last line of the figure emerged, all zeros except for a single centered one. The subsequent line would be zeros only, part of the frame.

Hiding in the alternating patterns of digits, deep inside the transcendental number, was a perfect circle, its form traced out by unities in a field of noughts.

Na novela, o comprimento da cadeia de 0's e 1's é dado por um produto de 11 números primos, sem no entanto especificar quais números primos. Infelizmente, não existe uma raiz quadrada inteira de nenhum produto de 11 números primos de forma que uma cadeia de $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \dots \cdot p_{10} \cdot p_{11}$ símbolos possa ser "reassembled (...) into a square raster, an equal number across and down". O texto de Sagan, portanto, contém certa *licentia poetica* neste aspecto. De qualquer forma, supondo que os primos sejam os 11 primeiros números primos, teríamos uma cadeia de $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot 29 \cdot 31 = 200,560,490,130 \simeq 447,840^2$ bits, bastante longa. De outra forma, supondo que os primos sejam apenas o primeiro número primo repetido 11 vezes, teríamos uma cadeia muito mais modesta de $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 2 = 2^{11} = 2048 \simeq 45^2$ símbolos, uma sequência de 0's e 1's que no entanto dificilmente pode ser descrita como durando "an unbelievably long time."

Neste artigo usamos a "revelação" da Dra. Arroway em *Contact* para definir uma nova classe de números inteiros baseados na identificação de certos padrões na expansão b -ária de números irracionais. Denominamos esse números de *números de Sagan*. Uma vez que expansões b -árias de números irracionais são infinitas para b 's inteiros, os números de Sagan formam uma família in-

finita de números. O artigo está organizado da seguinte forma: na Seção 1 definimos os números de Sagan através de entidades auxiliares chamadas n -círculos digitais e discutimos brevemente o conceito de número normal e o que eles têm a ver com os números de Sagan; na Seção 2 indicamos algumas relações dos números de Sagan com diversas áreas da matemática e possibilidades para desenvolvimentos futuros; finalmente, na Seção 3 concluímos o artigo com algumas observações gerais.

Este artigo possui alguns exercícios espalhados pelo texto. Alguns são elementares, enquanto outros apresentam desafios interessantes. Acreditamos que a maioria deles pode ser resolvida por um aluno de graduação de qualquer disciplina científica. Convidamos o leitor a empenhar um pouco de tempo nos exercícios para ampliar a sua compreensão de algumas das áreas da matemática mencionadas neste artigo. Desnecessário lembrar que matemática se aprende fazendo, e não assistindo a outros fazerem.

1 n -círculos digitais e números de Sagan

Primeiramente precisamos definir certas sequências de 0's e 1's que incorporam os padrões de interesse no estudo dos números de Sagan, para então prosseguirmos com a descrição dos principais objetos deste artigo.

1.1 n -círculos digitais

Como se pode inferir facilmente do trecho da novela de C. Sagan reproduzido na introdução, estamos interessados em definir padrões de 0's e 1's que quando arranjados em uma matriz quadrada se assemelham a círculos. Chamaremos esses padrões de *n -círculos digitais*. Embora n -círculos digitais sejam entidades auxiliares em nosso contexto, eles possuem muitas propriedades interessantes e já foram extensivamente estudados (talvez sob outras denominações, na maior parte das vezes sem denominação alguma) em diversos campos da matemática, como por exemplo em teoria dos números, geometria algébrica, análise combinatória e, claro, em computação gráfica ([30]).

Definição 1 (*n*-círculo digital). Um *n*-círculo digital $\Gamma^{(n)} = \langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n^2} \rangle$ é uma cadeia de n^2 bits $\gamma_i = 0$ ou 1 que, quando arranjada da esquerda para a direita e de cima para baixo, codifica o padrão de um círculo digitalizado de diâmetro n .

Comparada à “definição” dada em *Contact*, nossa definição ignora a moldura de 0’s em volta do círculo digitalizado. Se por um lado essa moldura é imaterial para nossa finalidade, por outro lado ela adiciona $4n - 4$ bits a cada *n*-círculo digital, fazendo com que os números de Sagan se tornem ainda mais rarefeitos do que já são, ou, equivalentemente, que os números de Sagan se tornem inteiros ainda maiores; veja discussão mais adiante.

Existem muitas maneiras diferentes de se digitalizar um círculo sobre uma matriz quadrada de $n \times n$ pixels para obter sua representação em termos de uma cadeia de n^2 bits ou, alternativamente, como um vetor binário de n elementos de comprimento n cada um. Uma abordagem inicial seria desenhar o círculo dentro de uma matriz quadrada $n \times n$ e atribuir um bit 1 a cada pixel cruzado por um segmento do círculo e um bit 0 aos demais pixels. Essa abordagem produz os seguintes primeiros *n*-círculos digitais: $\Gamma^{(1)} = \langle 1 \rangle$, $\Gamma^{(2)} = \langle 1, 1; 1, 1 \rangle$, e $\Gamma^{(3)} = \langle 1, 1, 1; 1, 0, 1; 1, 1, 1 \rangle$, onde separamos os grupos de bits correspondentes a cada linha do padrão por um ponto-e-vírgula, para aumentar a legibilidade. No entanto, essa abordagem é um pouco “exagerada”, marcando mais pixels do que é de fato necessário. Uma possível alternativa é usar um círculo de diâmetro $n - 1$ ao invés de n . Isso torna os padrões menos “quadrados” para valores pequenos de n , mas não faz muita diferença para diâmetros maiores. Essa possibilidade, no entanto, possui interesse independente não apenas em duas mas também em mais dimensões, e está relacionada com diversas questões combinatórias que surgem em campos tão diversos quanto teoria dos números e mecânica estatística.

Exercício 1. (a) Verifique que a fim de digitalizar um círculo no esquema descrito no texto tal que a primeira linha possua “a single numeral one, exactly in the middle, with zeros to the borders, left and right” nós te-

ríamos de ter um número ímpar $n < 5/4$, isto é, uma impossibilidade exceto no caso trivial $n = 1$. (b) Verifique que um círculo de diâmetro n não cruza o pixel do canto de uma matriz quadrada de $n \times n$ pixels para $n > 4 + 2\sqrt{2} \simeq 6.828$. Assim, o aspecto “quadrado” de $\Gamma^{(n)}$ se suaviza progressivamente conforme n se torna maior que 7. (c) Mostre que para obter “a single numeral one, exactly in the middle, with zeros to the borders, left and right” na primeira linha de uma matriz quadrada de um círculo digitalizado o círculo deve ter um raio $n/2 - 1 < r < \sqrt{(n/2 - 1)^2 + (1/2)^2}$, com $n \geq 3$ ímpar.

Exercício 2 ([16, Exercício 3.33]). Um círculo de diâmetro $2n - 1$ é desenhado simetricamente em um quadrado de $2n \times 2n$ pixels. (a) Quantos pixels contêm um segmento do círculo? (b) Encontre uma função $f(n, k)$ tal que exatamente $\sum_{k=1}^{n-1} f(n, k)$ pixels estão inteiramente dentro do círculo. *Dica:* Repare que r^2 , com r o raio do círculo, não pode ser um número inteiro, de forma que, pelo Teorema de Pitágoras, o círculo não passa pelo canto de nenhum pixel.

A representação preferida em computação gráfica para digitalizar seções cônicas (círculos, elipses, parábolas e hipérbolas, além de linhas retas) consiste em analisar as arestas entre pixels adjacentes ao invés dos pixels eles próprios. Dada uma curva parametrizada $z(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$, podemos digitalizar a curva definindo quais pixels pertencem ao interior da curva e forçando $z(t)$ a percorrer passos discretos ao longo das arestas dos pixels. O primeiro pixel que, de acordo com a definição (que pode variar) pertence ao interior da curva é marcado com um 1, os outros pixels recebem 0. Para um círculo de raio r , $z(t) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$ e podemos eliminar t para obter a equação não-paramétrica $x^2 + y^2 = r^2$. Definimos daí um pixel interior se as coordenadas de seu centro, dadas por $(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2})$, obedecem a $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq r^2$. Existem vários algoritmos bem conhecidos para implementar essa abordagem ([3, 4, 18, 25]). A figura 1 ilustra duas opções para digitalizar um círculo em uma matriz 4×4 , uma mais ingênua, marcando to-

dos os pixels cruzados pela curva, e a abordagem preferida em computação gráfica, que dá ênfase às arestas dos pixels que se encontram dentro da curva. A figura 2 ilustra os n -círculos digitais com $n = 2, 3$ e 5 .

Exercício 3. Digitalize a elipse $(x/4)^2 + (y/3)^2 = 1$ à mão a partir das posições das bordas e dos centros dos pixels conforme descrito no texto. *Dica:* Dê uma olhada no Algoritmo T em [18, Seção 7.1.3].

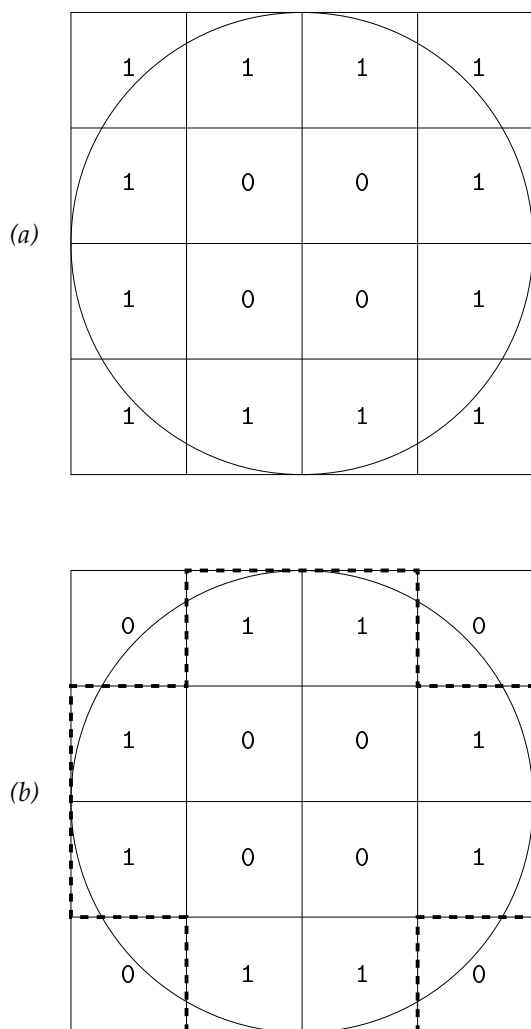


Figura 1: Diferentes maneiras de digitalizar um círculo como uma matriz 4×4 . (a) Abordagem ingênua, resultando em um círculo digitalizado excessivamente “quadrado” para valores pequenos de n ; (b) A abordagem preferida em algoritmos e em tecnologia de computação gráfica (raster graphics).

1.2 Números de Sagan

Definição 2 (Número de Sagan). O n -ésimo número (inteiro decimal) de Sagan $S_{11}^{(n)}(\pi)$ é a posição na parte fracionária da expansão 11-ária de π a partir da qual o primeiro dígito do padrão do n -círculo digital $\Gamma^{(n)}$ se ancora.

Números de Sagan $S_{11}^{(n)}(\pi)$ podem ser generalizados em duas maneiras óbvias, como sua própria notação sugere. A primeira consiste em permitir números irracionais α quaisquer no lugar de π , e a segunda consiste em procurar n -círculos digitais em bases b arbitrárias diferentes de 11. De qualquer forma, a definição generalizada perde sua conexão com a novela de C. Sagan. Os números de Sagan generalizados, no entanto, apresentam diversas possibilidades interessantes para a matemática recreativa.

Definição 3 (Números de Sagan generalizados). O n -ésimo número (inteiro decimal) de Sagan $S_b^{(n)}(\alpha)$ é a posição na parte fracionária da expansão b -ária de $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ a partir da qual o primeiro dígito do padrão do n -círculo digital $\Gamma^{(n)}$ se ancora.

Números de Sagan (generalizados ou não) são, exceto pelos primeiros poucos deles, números inteiros muito grandes. Podemos estimar quão grandes os números de Sagan $S_{11}^{(n)}(\pi)$ devem ser. Se todos os padrões de n^2 dígitos na expansão de π na base 11 são igualmente prováveis, o que equivale a dizer que π é normal na base 11 (cf. a próxima subseção), então devemos esperar encontrar com uma probabilidade finita qualquer cadeia de n^2 caracteres, por exemplo, um n -círculo digital, aproximadamente a cada 11^{n^2} dígitos; em uma base $b \neq 11$, esse número se torna b^{n^2} . Assim, enquanto podemos esperar que $S_{11}^{(1)}(\pi)$ seja um número da ordem de 10 ou 20, $S_{11}^{(2)}(\pi)$ deve estar no intervalo 10.000–20.000 e $S_{11}^{(3)}(\pi)$ entre 2.000.000.000 e 10.000.000.000. De fato, $S_{10}^{(1)}(\pi) = 1$, o dígito ‘1’ logo após o dígito ‘3’ em $3.\underline{1}41\ 592\dots$, e $S_{10}^{(2)}(\pi) = 12.700$, em um trecho $\dots 144\ \underline{111}\ 126\dots$ da parte fracionária de π . Na base 11, $S_{11}^{(1)}(\pi) = 1$ também, uma vez que $\pi_{11} = 3.\underline{1}61\ 507\dots$. Repare, no entanto, que esta estimativa é de

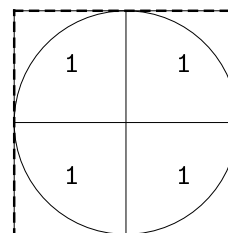
natureza estatística: o primeiro 0 na expansão decimal de π ocorre apenas na posição 32!

Na novela de C. Sagan, o padrão possui pelo menos $2^{11} = 2048$ dígitos, o menor produto possível de 11 números primos. Isso significa que teríamos de examinar $11^{2048} \simeq 5.919 \times 10^{2132}$ dígitos antes de provavelmente encontrar o padrão $\Gamma^{(n)}$ correspondente, neste caso com $n = \sqrt{2048} \simeq 45$. Uma vez que há menos de 3.2×10^{16} nanossegundos em um ano (mesmo em anos bissextos) e considerando uma taxa de computação de ~ 1 flop/ns e ~ 1 dígito/flop (esta última francamente otimista³), levaria $\sim 10^{2106}$ vezes a idade do Universo (atualmente estimada em cerca de 13,5 bilhões de anos) de tempo de CPU para executar a busca de $S_{11}^{(45)}(\pi)$ com nossa tecnologia atualmente disponível. Mesmo com a utilização em *grid* de todos os recursos computacionais atualmente existentes no mundo o cálculo levaria inúmeros zilhões de idades do Universo... A menos que haja uma maneira radicalmente diferente – de outro mundo! – de se fazer matemática e realizar cálculos, simplesmente não vai dar para fazer a conta. Na verdade, existem razões de ordem física mais profundas para acreditar que tal busca não seria possível de fazer no Universo conhecido, independentemente da abordagem matemática ou computacional ou da tecnologia (terrestre ou alienígena) utilizada ([20, 21, 22]).

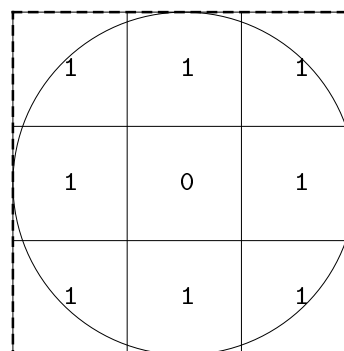
Exercício 4. Supondo que π_{11} seja normal, estime a quantidade de tempo de CPU (considerando ~ 1 flop/ns, como fizemos) que seria necessária para encontrar $S_{11}^{(447,840)}(\pi)$, onde $447,840 \simeq \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 29 \cdot 31}$, o número que C. Sagan provavelmente tinha em mente quando escreveu *Contact*.

Exercício 5. Determine $S_{11}^{(2)}(\pi)$. Dígitos de π na base 10 suficientes para sua conversão para a base 11 podem ser encontrados na Internet – basta procurar por “pi digits” no seu buscador preferido. Tome cuidado com a entrada de seu algoritmo para evitar o conhecido “fenômeno” de *garbage-in-garbage-out*.

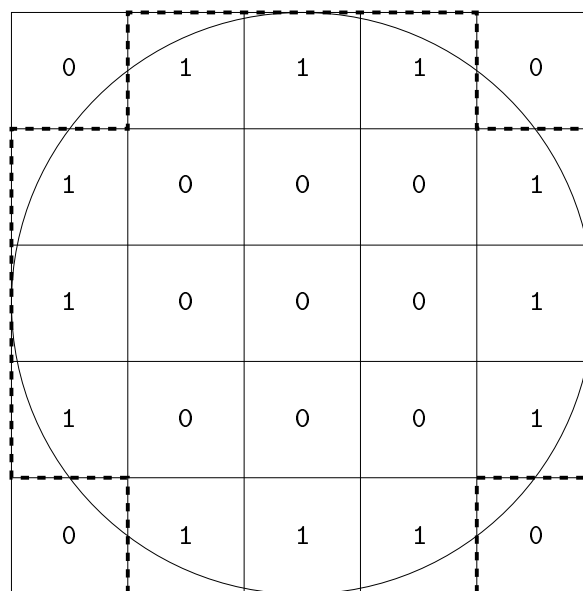
³ A estimativa de ~ 1 dígito/flop também ignora o fato de que diversos cálculos nessa área são realizados com tipos de dados inteiros multi-bytes, e não com números em ponto flutuante.



(a)



(b)



(c)

Figura 2: Padrões para os n -círculos digitais: (a) $\Gamma^{(2)}$, (b) $\Gamma^{(3)}$, e (c) $\Gamma^{(5)}$. O padrão de $\Gamma^{(4)}$ aparece na figura 1(b).

1.3 Números normais

Um número real $\alpha \in \mathbb{R}$ é *normal na base* $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ se em sua representação na base b cada uma das b^k cadeias diferentes de dígitos $s_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}^k$ ocorre, em um sentido assintótico, com frequências iguais. Em outras palavras, $\lim_{l \rightarrow \infty} N(s_k, l)/l = b^{-k}$ para cada s_k , onde $N(s_k, l)$ é o número de ocorrências de s_k nos primeiros l dígitos de α na base b . Um número que é normal em todas as bases inteiras é chamado *absolutamente normal*. Obviamente, apenas números irracionais $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ podem ser normais.

A normalidade de um número irracional é uma questão difícil em teoria analítica dos números, e pouquíssimos números irracionais são demonstravelmente normais em uma dada base. Um resultado muito importante a esse respeito pertence a Émile Borel, que, em 1909, além de introduzir o próprio conceito de número normal, provou que, em decorrência da Lei dos Grandes Números, quase todos os números reais são absolutamente normais ([11]; ver também [5], Capítulo 7, problema 7.2.7 (b)). No entanto, a prova de Borel não é construtiva, e provar que um determinado número é normal continua sendo uma matéria difícil. Do ponto de vista construtivo, dois exemplos bastante conhecidos de números decimais normais são a constante de Champernowne $0,1234567891011\dots$, obtida pela concatenação dos números naturais na base 10 ([13]), e a constante de Copeland-Erdős $0,2357111317\dots$, obtida pela concatenação dos números primos na base 10 ([14]). Enquanto a constante de Champernowne é obviamente normal (da mesma forma que a constante de Champernowne binária $0,11011100101\dots$ na base 2, veja [8]), a constante de Copeland-Erdős não o é tão obviamente assim, e o artigo de Copeland e Erdős ([14]) contém um interessantíssimo resultado em teoria dos números (veja o Exercício 7).

Números artificiais semelhantes podem ser construídos em outras bases também ([23, 24, 28, 29]), porém números irracionais conhecidos como π ou $\zeta(3)$, a função zeta de Riemann em $z = 3$, não puderam ter sua normalidade provada ainda em nenhuma base. Em-

bora segundo cálculos recentes que determinaram mais de $2,576 \times 10^{12}$ dígitos decimais de π (um pouco menos que 75×2^{35} dígitos decimais, após o descarte de alguns dígitos⁴) aparentemente π e $1/\pi$ sejam normais nas bases 10 e 16, a normalidade de π permanece uma questão em aberto ([7, 31]). A busca por números normais é uma área ativa da aritmética avançada e da teoria dos números e, mais modernamente, do que se denomina “matemática experimental” ([7, 8, 9, 10]).

Se π for absolutamente normal, o argumento de C. Sagan em *Contact* – que os engenheiros cósmicos criadores de nosso Universo assinaram sua criação inserindo um padrão reconhecível em uma de suas constantes fundamentais – perderia um pouco de sua graça, pois, afinal, neste caso deveríamos esperar encontrar *qualquer* padrão dentro de π , em particular n -círculos digitais, dado tempo ou poder computacional suficiente. Por outro lado, se π for normal apenas na base 11 ou exceto na base 11, daí sim teríamos algo surpreendente! Reparamos, de passagem, que a ideia de “assinar a criação” foi também explorada por Douglas Adams em sua série de livros *The hitchhiker’s guide to the Galaxy* ([1]) e *The restaurant at the end of the Universe* ([2]),⁵ nos quais o “venerable Magrathean planetary designer” Slartibartfast deixa sua assinatura em algum lugar dos fiordes noruegueses da Terra, uma de suas peças de design premiadas.⁶

⁴ Y. Kanada e colaboradores anunciaram, em 6 de dezembro de 2002, a obtenção do recorde de 1.241.100.000.000 de dígitos decimais calculados para π e $1/\pi$ (ver www.super-computing.org). D. Takahashi anunciou, em 17 de agosto de 2009, a obtenção do recorde de 2.576.980.370.000 de dígitos decimais calculados para π e $1/\pi$ (www.hpcs.cs.tsukuba.ac.jp/daisuke/pi.html).

⁵ Em português, “O guia do mochileiro das Galáxias” e “O restaurante no fim do Universo”; veja nota de rodapé #2. Recomendamos calorosamente esses livros (e os outros da série) como exemplos do mais fino humor britânico, nos quais *insights* filosóficos profundos e caracteres inquietantes se tornam personagens em uma das ficções científicas mais esdrachadas de todos os tempos.

⁶ Douglas Adams disse certa vez que o nome do personagem Slartibartfast começou com “Phartiphukborlz”, mas que ele foi alterando o nome gradualmente até que tivesse algo que soasse tão rude quanto o nome original, mas fosse quase, embora não completamente, inofensivo e pudesse ser transmitido pela BBC.

Exercício 6. Em uma sequência aleatória de 1000 dígitos, qual é a probabilidade de haver *exatamente* 100 de cada dígito possível (0, 1, ..., 9)? E qual é a probabilidade de haver *exatamente* 10 de cada sequência de dois dígitos possível (00, 01, ..., 99)? *Dica:* Use a aproximação de Stirling $n! \approx \sqrt{2\pi n} (n/e)^n$ para calcular os coeficientes multinomiais que aparecerem.

Exercício 7. Seja

$$\mathcal{F} = 0.011235\dots = 0.F_0 F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 \dots,$$

com $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, e $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para $k \geq 2$, os números de Fibonacci. Decida, justificando, se \mathcal{F} é ou não é normal na base 10. *Dica:* Mostre que o número de números de Fibonacci até x (isto é, a densidade integrada de números de Fibonacci até x) é aproximadamente dado por $\Phi(x) = \ln[\sqrt{5}\phi(x+1)] / \ln \phi$, com $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618033\dots$ a razão áurea, e aplique os resultados de Copeland & Erdős ([14]). *Observação:* $\Phi(x)$ é exato a menos de um termo de ordem $O(\phi^{-2x})$; a parte inteira de $\Phi(x)$ fornece excelentes valores para todo $x \geq 1$ e é exata para $x \geq 34$.

Exercício 8. Ao invés de concatenar os números de Fibonacci como no exercício anterior, forme a fração contínua

$$\mathcal{F} = F_0 + \frac{1}{F_1 + \frac{1}{F_2 + \frac{1}{F_3 + \ddots}}}} = [F_0; F_1, F_2, F_3, \dots].$$

O que você pode dizer acerca da normalidade de \mathcal{F} ? Realize alguns experimentos computacionais para obter as primeiras centenas de casas decimais de \mathcal{F} e analise a frequência relativa de cadeias de 2 ou 3 dígitos como uma análise rudimentar de normalidade. Estime a significância estatística de seus resultados contra a hipótese de que \mathcal{F} seja normal na base 10. Talvez você possa publicar seus resultados (positivos ou negativos) no periódico *Fibonacci Quarterly!*

2 Outros desenvolvimentos usando números de Sagan

As definições de $\Gamma^{(n)}$ e de $S_b^{(n)}(\alpha)$ colocam algumas questões interessantes em matemática recreativa. Vamos listar apenas algumas delas a seguir.

2.1 Grupos pontuais em duas dimensões

É possível obter a cadeia de dígitos 0 e 1 de um n -círculo digital dado apenas n ? Essa questão pode ser vista como uma questão interessante em geometria analítica. Diversas simetrias estão presentes na cadeia de dígitos de um n -círculo digital. Por exemplo, essa cadeia de dígitos é palíndrome (também conhecido como “capi-cua”), isto é, ela é simétrica em relação ao seu ponto central, idêntica quando lida normalmente ou de trás para a frente. Para valores pares de n , $\Gamma^{(n)}$ é da forma

$$\Gamma_1^{(n)} \vee \Gamma_2^{(n)} \vee \dots \vee \Gamma_{\frac{n}{2}}^{(n)} \vee \Gamma_{\frac{n}{2}}^{(n)} \vee \dots \vee \Gamma_2^{(n)} \vee \Gamma_1^{(n)},$$

onde cada $\Gamma_k^{(n)}$ é o padrão dado pelos bits $\langle \gamma_{(k-1)n+1}, \gamma_{(k-1)n+2}, \dots, \gamma_{kn} \rangle$ e \vee é a operação de concatenação de cadeias. Isso significa que basta conhecer o padrão para o semicírculo superior para determinar o padrão do círculo completo. Agora, cada $\Gamma_k^{(n)}$ possui simetria especular com relação ao seu ponto central, $\Gamma_k^{(n)}(\ell) = \Gamma_k^{(n)}(n - \ell + 1)$, onde $\Gamma_k^{(n)}(\ell)$ indica o ℓ -ésimo bit da cadeia $\Gamma_k^{(n)}$. Visto como uma matriz quadrada $n \times n$, também é evidente que $\Gamma^{(n)}$ é simétrico para todo n , par ou ímpar, isto é, que $\Gamma_k^{(n)}(\ell) = \Gamma_\ell^{(n)}(k)$. Este fato, junto com a simetria estabelecida anteriormente, significa que basta conhecer o padrão de um quadrante do círculo para reconstruir o padrão do círculo completo, uma vez que podemos determinar os outros quadrantes através de relações de simetria.

Até este ponto, nos beneficiamos das simetrias da matriz quadrada que codifica o padrão do n -círculo digital para segmentá-lo em quadrantes menores, e em princípio podemos seguir adiante neste processo de divisão para concluir que apenas um semiquadrante ($0 \leq \theta \leq \pi/4$) é necessário para determinar o padrão completo, e daí concluir que apenas um quarto-quadrante

($0 \leq \theta \leq \pi/8$) é necessário, e assim por diante. De fato, para determinar um círculo precisamos apenas de dois pontos: seu centro e um ponto qualquer em seu arco para fixar seu raio! No entanto, por causa da finitude de n , esse processo de divisão em sub-quadrantes cada vez menores não pode ser levado a cabo indefinidamente para n -círculo digitais, conforme o exercício a seguir procura demonstrar.

Exercício 9. Determine as relações entre $\Gamma_{k_1}^{(n)}(I)$ no primeiro semiquadrante com os outros $\Gamma_{k_i}^{(n)}(I)$, $2 \leq i \leq 8$, nos outros semiquadrantes. Qual é o valor do menor n abaixo do qual isso não pode ser feito? *Dica:* Desenhe alguns $\Gamma^{(n)}$ em papel quadriculado antes de prosseguir neste exercício.

Este assunto oferece muitas oportunidades para explorar noções de grupos pontuais em duas dimensões. A implementação dessas simetrias em um programa para digitalizar figuras geométricas pode ser bastante instrutiva no estudo de geometria analítica, computação gráfica e assuntos correlatos.

Exercício 10. Escreva um programa de computador (ou um algoritmo em pseudo-código) que dado um inteiro n gera $\Gamma^{(n)}$. Implemente as considerações de simetria sobre $\Gamma^{(n)}$ tanto quanto possível.

2.2 n -círculos digitais generalizados

Até agora propusemos os números de Sagan $S_{11}^{(n)}(\pi)$ e sua generalização $S_b^{(n)}(\alpha)$ para outros argumentos irracionais α e bases b . No entanto, é possível generalizar também os n -círculos digitais. C. Sagan descreveu os $\Gamma^{(n)}$ em π como "... a perfect circle, its form traced out by unities in a field of noughts." Poderíamos flexibilizar tanto a parte "traced out by unities" quanto a parte "in a field of noughts" na definição de $\Gamma^{(n)}$ permitindo que os bits individuais (agora, dígitos) γ_i em $\Gamma^{(n)}$ assumam valores arbitrários p e q tais que $\Gamma^{(n)}$ descreva um círculo formado por p 's em um campo de fundo de q 's. No caso mais geral, podemos definir p e q como conjuntos não-vazios $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, o conjunto dos dígitos que podem aparecer no círculo digitalizado, e

$Q = \{q_1, q_2, \dots, q_l\}$, o conjunto dos dígitos que formam o campo de fundo. Repare que embora seja desejável, não é estritamente necessário que $P \cap Q = \emptyset$. Assim, definimos o n -círculo digital generalizado como:

Definição 4 (n -círculo digital generalizado). Um n -círculo digital $\Gamma^{(n)}(P, Q) = \langle \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n^2} \rangle$ é uma cadeia de n^2 dígitos $\gamma_i \in P \cup Q$ que quando é arranjada da esquerda para a direita e de cima para baixo em uma matriz quadrada $n \times n$ codifica o padrão de um círculo digitalizado de diâmetro n formado por dígitos $\gamma_i \in P$ em um campo de fundo formado por dígitos $\gamma_i \in Q$.

O n -círculo digital $\Gamma^{(n)}$ corresponde ao caso especial $\Gamma^{(n)}(\{1\}, \{0\})$, que pode ser considerado o n -círculo digital "minimal". O outro extremo é dado pelo n -círculo digital generalizado $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ com $P \subset Q$, cujo padrão dificilmente contém alguma informação e pode ser chamado de n -círculo digital "degenerado". O caso de $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ com $Q \subset P$ é também altamente indesejável, embora neste caso a existência de menos diversidade no campo de fundo $\gamma_i \in Q$ que no padrão do círculo $\gamma_i \in P$ implique que seja possível identificar mais claramente o círculo digitalizado. É possível quantificar o quanto de informação está contida no círculo em função de P e Q usando ideias da teoria da informação (informação mútua, entropias relativas), mas não vamos nos estender nesse assunto. O leitor interessado deve consultar qualquer uma das excelentes referências existentes em teoria da informação ([15, 19]).

Da definição de $\Gamma^{(n)}(P, Q)$, está claro que os n -círculos digitais generalizados são objetos combinatórios quando $|P| \geq 2$ ou $|Q| \geq 2$, isto é, que eles representam classes de objetos relacionados por combinações e permutações dos símbolos em P e Q . Por exemplo, podemos ter um padrão $\Gamma^{(3)}(\{1, 7\}, \{0, 3\}) = \langle 1, 1, 7; 1, 3, 1; 7, 1, 7 \rangle$ ou um padrão igualmente válido $\Gamma^{(3)}(\{1, 7\}, \{0, 3\}) = \langle 7, 1, 7; 7, 0, 1; 1, 1, 7 \rangle$. Isso torna os n -círculos digitais generalizados mais ubíquos que seus colegas "minimais". Os números de Sagan generalizados referentes aos n -círculos digitais generalizados podem ser denotados por $S_b^{(n)}(\alpha; P, Q)$. Este número pode ser definido como o endereço do primeiro

dígito do primeiro padrão da classe $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ encontrado em α . Alternativamente, podemos adotar alguma ordem para os membros de $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ (por exemplo, a ordem numérica natural) e considerar os números de Sagan generalizados $S_b^{(n)}(\alpha; P, Q)$ como denotando eles também uma classe de números, porém não necessariamente obedecendo a mesma ordem imposta a $\Gamma^{(n)}(P, Q)$, pois podemos ter um membro de $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ sucessor de outro membro da mesma classe mas com um endereço em α menor. O leitor não deve ter dificuldade em entender que todos os n -círculos digitais generalizados da classe $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ só podem ser encontrados em expansões de números irracionais em bases $b \geq \max\{\gamma \in P \cup Q\}$, muito embora alguns membros da classe $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ possam vir a ser encontrados em um dado número irracional α na base b mesmo quando essa condição é violada.

Exercício 11. O quanto mais frequentemente devemos esperar encontrar $\Gamma^{(n)}(P, Q)$ que sua contraparte mais estrita $\Gamma^{(n)}$ em um dado número normal na base b em função de $P, Q, e b$?

2.3 Fórmulas do tipo BBP

Para algumas combinações bastante interessantes (embora um pouco artificiais) de números α e bases b , a busca por padrões de dígitos pode ser feita sem termos de investigar toda a expansão de α , uma vez que nestes casos conhecemos *a priori* qual é a sequência de b -dígitos de α através de fórmulas do tipo

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{b^k} \frac{p(k)}{q(k)},$$

com b um inteiro (a base do sistema numérico) e $p(k)$ e $q(k)$ dois polinômios de coeficientes inteiros ([6, 8, 9, 12]). Com fórmulas desse tipo, buscas de padrões podem ser feitas usando janelas $(\alpha_i \alpha_{i+1} \dots \alpha_{i+\ell-1})$ de largura ℓ sem que seja necessário calcular todos os dígitos anteriores até α_{i-1} . Isso economiza tempo e espaço no cálculo dos números e de seus dígitos. Suprendentemente, $\pi, \pi^2, \log 2, \sqrt{2}$, e diversas constantes relacionadas a esses números podem ser escritas nessa forma,

conhecida como “fórmula do tipo BBP”, nas bases 2 e 16 ([6]). Por exemplo, uma das fórmulas para π mais notáveis é dada por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

É bastante tentador, e na verdade trata-se de todo um programa de pesquisa, investigar identidades semelhantes a essa para π em outras bases. No entanto, J. Borwein, D. Borwein e W. Galway mostraram em 2004 que não existem fórmulas de grau 1 do tipo BBP (como acima) em bases b para π quando b não é uma potência de 2 ([12]). Esse resultado, no entanto, não elimina a possibilidade de que haja abordagens matemáticas completamente diferentes que permitam obter dígitos individuais de π em outras bases a partir de um ponto arbitrário em sua expansão. Este é um problema em aberto para o qual convidamos o leitor a empenhar esforços em sua resolução!

3 Conclusões

Embora tenham finalidade puramente recreativa, os números de Sagan possuem conexões com diversas áreas de conhecimento e podem ser usados para ilustrar diversos conceitos interessantes em teoria dos números elementar, probabilidade básica, matemática discreta, no estudo de simetrias e em computação gráfica, entre outros. Ao introduzir os números de Sagan, fomos levados a definir construções geométricas que denominamos n -círculos digitais. Essas construções possuem seu habitat natural em computação gráfica, mais especificamente no campo das imagens matriciais (*raster graphics*) e em reconhecimento de padrões. Números de Sagan também podem ser generalizados de várias formas através de seus parâmetros α e b e também pela mudança do padrão de definição: por exemplo, podemos tentar encontrar padrões de n -quadrados ao invés de n -círculos nos números irracionais, ou mesmo padrões referentes a símbolos como “ \emptyset ” ou “ ∞ ”.

Se π for normal, ele poderia vir a ser usado como a cifra definitiva de tudo que fosse numérico em nossas

vidas. Por exemplo, poderíamos usar seus dígitos para definir um $RG(\pi)$ como uma alternativa ao nosso número de RG ! Naturalmente, essa é uma ideia maluca e inútil, primeiro porque estaríamos apenas tomando um código numérico no lugar de outro, mas também porque provavelmente o endereço em π_{10} (ou mesmo em π_{26} , o número π escrito na base do alfabeto de 26 letras) de nosso RG provavelmente seria um número enorme, muito maior que o próprio RG original. Isso sem falar no desafio de calcular os dígitos de π em um tempo razoável e com recursos computacionais limitados para o RG de todas as pessoas. Finalmente, esses cálculos seriam responsáveis por lançar enormes quantidades de CO_2 na atmosfera, algo que devemos evitar de fazer hoje em dia ...

Em resumo, esperamos ter introduzido uma nova classe de números com muitas possibilidades de entretenimento tanto para matemáticos profissionais quanto amadores, de inclinações tanto teóricas quanto aplicadas e computacionais, e que um dia possamos ver tabulados diversos números de Sagan apenas pela diversão de saber que eles existem e onde estão.

Agradecimentos. O autor gostaria de agradecer a Fábio E. R. Campolim (doutorado na UFABC) pelos inúmeros pugilatos sobre as questões últimas acerca da vida, do Universo e de tudo mais. O autor também gostaria de agradecer ao editor Eduardo Colli pelas inúmeras oportunidades de aperfeiçoar a apresentação final deste artigo.

Referências

- [1] ADAMS, D. *The hitchhiker's guide to the Galaxy*. London: Pan Books, 1979.
- [2] ADAMS, D. *The restaurant at the end of the Universe*. London: Pan Books, 1980.
- [3] VAN AKEN, J. R. An efficient ellipse-drawing algorithm. *IEEE Computer Graphics and Applications*, v. 4, n. 9, p. 24–35, 1984.
- [4] VAN AKEN, J. R.; NOVAK, M. Curve drawing algorithms for raster displays. *ACM Transactions on Graphics*, v. 4, n. 2, p. 147–169, 1985.
- [5] ASH, R. B. *Real analysis and probability*. San Diego: Academic Press, 1972.
- [6] BAILEY, D. H.; BORWEIN, P.; PLOUFFE, S. On the rapid computation of various polylogarithmic constants. *Mathematics of Computation*, v. 66, n. 218, p. 903–913, 1997.
- [7] BAILEY, D. H.; BORWEIN, J. M.; BORWEIN, P. B.; PLOUFFE, S. The quest for Pi. *Mathematical Intelligencer*, v. 19, n. 1, p. 50–57, 1997.
- [8] BAILEY, D. H.; CRANDALL, R. E. On the random character of fundamental constant expansions. *Experimental Mathematics*, v. 10, n. 2, p. 175–190, 2001.
- [9] BAILEY, D. H.; MISIUREWICZ, M. A strong hot spot theorem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 134, n. 9, p. 2495–2501, 2006.
- [10] BAILEY, D. H.; BORWEIN, J. M.; KAPOOR, V.; WEISSTEIN, E. N. Ten problems in experimental mathematics. *The American Mathematical Monthly*, v. 113, n. 6, p. 481–509, 2006.
- [11] BOREL, E. Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, v. 27, n. 1, p. 247–271, 1909.
- [12] BORWEIN, J. M.; BORWEIN, D.; GALWAY, W. F. Finding and excluding b -ary Machin-type individual digit formulae. *Canadian Journal of Mathematics*, v. 56, n. 5, p. 897–925, 2004.
- [13] CHAMPERNOWNE, D. G. The construction of decimals normal in the scale of ten. *The Journal of the London Mathematical Society*, v. 8, n. 4, p. 254–260, 1933.
- [14] COPELAND, A. H.; ERDŐS, P. Note on normal numbers. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 52, p. 857–860, 1946.

- [15] COVER, T. M.; THOMAS, J. A. *Elements of information theory*. 2. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2006.
- [16] GRAHAN, R. L.; KNUTH, D. E.; PATASHNIK, O. *Concrete mathematics*. 2. ed. Reading: Addison-Wesley, 1998.
- [17] GREENE, B. *The elegant Universe: superstrings, hidden dimensions, and the quest for the ultimate theory*. New York: Vintage, 2000.
- [18] KNUTH, D. E. *The art of computer programming, Volume 4, Fascicle 1: bitwise tricks & techniques, binary decision diagrams*. Reading: Addison-Wesley, 2009.
- [19] KULLBACK, S. *Information theory and statistics*. New York: Dover, 1997.
- [20] LLOYD, S. Ultimate physical limits to computation. *Nature*, v. 406, p. 1047–1054, 2000.
- [21] LLOYD, S. Computational capacity of the Universe. *Physical Review Letters*, v. 88, n. 23, 237901, 2002.
- [22] LLOYD, S. *Programming the Universe: a quantum computer scientist takes on the Cosmos*. New York: Vintage, 2007.
- [23] PINCUS, S.; SINGER, B. H. Randomness and degrees of irregularity. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, v. 93, n. 5, p. 2083–2088, 1996.
- [24] PINCUS, S.; SINGER, B. H. A recipe for randomness. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, v. 95, n. 18, p. 10367–10372, 1998.
- [25] PITTEWAY, M. L. V. Algorithm for drawing ellipses or hyperbolæ with a digital plotter. *Computer Journal*, v. 10, n. 3, p. 282–289, 1967.
- [26] SAGAN, C. *Contact*. New York: Simon & Schuster, 1985.
- [27] SMOLIN, L. *The trouble with physics: the rise of string theory, the fall of science, and what comes next*. Boston: Houghton-Mifflin, 2006.
- [28] STONEHAM, R. G. On (j, ϵ) -normality in the rational fractions. *Acta Arithmetica*, v. 16, p. 239–237, 1970.
- [29] STONEHAM, R. G. A general arithmetic construction of transcendental non-Liouville normal numbers from rational functions. *Acta Arithmetica*, v. 16, p. 239–253, 1970.
- [30] THEOHARIS, T.; PAPAIOANNOU, G.; PLATIS, N.; PATRIKALAKIS, N. M. *Graphics and visualization: principles & algorithms*. Wellesley: A. K. Peters, 2008.
- [31] WAGON, S. Is Pi normal? *Mathematical Intelligencer*, v. 7, n. 3, p. 65–67, 1985.

José Ricardo G. Mendonça
jrgmendonca@hotmail.com