Abaixo publicamos algumas questões do nível universitário da Olimpíada Brasileira de Matemática, de 2009, tanto da primeira quanto da segunda fase, que não apareceram no número anterior.

Questões da primeira fase

1. Dados os números reais a, b, c, d, considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}.$$

Se $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, prove que

$$\det A = f(1)f(i)f(-1)f(-i).$$

(Aqui i representa a unidade imaginária.)

2. Considere a sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ definida por $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{\pi}{3}$ e, para $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{\pi(a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + a_2 a_{n-2} + \cdots + a_n a_0)}{3(n+1)}.$$

Calcule

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{2^k} = a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{4} + \frac{a_3}{8} + \cdots.$$

Questão da segunda fase

3. Para n inteiro positivo seja $f(n)$ o número de produtos de inteiros maiores que 1 cujo resultado é no máximo n, isto é, $f(n)$ é o número de k-uplas $(a_1, \ldots, a_k)$ em que k é algum natural, $a_i \geq 2$ é inteiro para todo i e $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k \leq n$ (contando a 0-upla vazia $()$, cujo produto dos termos é 1). Assim, por exemplo, $f(1) = 1$, por causa da 0-upla $()$, e $f(6) = 9$, por causa da 0-upla $()$, das 1-uplas (3), (4), (5) e (6) e das 2-uplas $(2,2)$, $(2,3)$ e $(3,2)$. Seja $\alpha > 1$ tal que

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} = 2.$$

(a) Prove que existe uma constante $K > 0$ tal que $f(n) \leq Kn^\alpha$ para todo inteiro positivo n.

(b) Prove que existe uma constante $c > 0$ tal que $f(n) \geq cn^\alpha$ para todo inteiro positivo n.

O problema seguinte é motivado pela exposição das Notas de Aula, deste número.

4. Seja $B_n(r)$ a bola n-dimensional de raio r centrada na origem, isto é, o conjunto dos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ tais que

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq r^2.$$

Por exemplo, $B_1(r) = [-r, r]$ e o hipervolume é o comprimento do intervalo, $2r$; $B_2(r)$ é o disco de raio r centrado na origem e seu hipervolume é sua área πr^2; para $n = 3$ o hipervolume é o próprio volume, igual a $\frac{4}{3}\pi r^3$. Mostre que a bola $B_n(r)$ tem hipervolume $V_n r^n$ e calcule V_n. Como se comporta V_n quando n tende a infinito? *Sugestão: você pode usar recorrência e usar o artigo da seção Notas de Aula.*

Problema sugerido por Daniel Tausk:

5. Sejam $A_1, \ldots, A_n$ transformações lineares de $\mathbb{C}^k$, $k \geq 1$, não negativas, isto é, para cada $i = 1, \ldots, n$ tem-se $\langle A_i x, x \rangle \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{C}^k$. Seja $\|\cdot\|$ a norma de operadores, isto é,

$$\|B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Bx|}{|x|},$$

em que $|x|$ é a norma euclidiana de x em $\mathbb{C}^k$. Mostre que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i A_i \right\| \leq \max_i |c_i| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} A_i \right\|,$$

para quaisquer $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.