O teorema de Borsuk-Ulam

Daniel V. Paulino

IME/USP

O presente trabalho foi escrito em ocasião do seminário realizado entre os dias 14 e 15 de outubro de 2008 no curso de Introdução à Topologia Algébrica ministrado no IME/USP. O mesmo destina-se a apresentar uma demonstração elementar do Teorema de Borsuk-Ulam. Vale a pena destacar aqui a importância de realizar uma abordagem elementar, posto que a grande maioria dos textos que tratam o assunto só o fazem com o uso de ferramentas como a teoria de homologia ou a teoria dos anéis de co-homologia. Ao passo que o especialista pode argumentar que estas são mais conceituais e revelam o cerne do resultado, ao contrário das demonstrações *ad hoc* classificadas como elementares, é fato que estas são impraticáveis para os estudantes não familiarizados com o ferramental avançado da topologia algébrica. Com esta motivação em mente, faremos aqui uma demonstração conhecida como extensão homotópica, mais intuitiva e geométrica, seguindo a linha de [2].

1 O teorema em suas diversas faces

O Teorema de Borsuk[1]-Ulam[2] é talvez um dos resultados mais úteis que a topologia algébrica elementar oferece ao mundo exterior. Toda esta importância se deve principalmente a quatro fatores: diversos enunciados equivalentes; diversos tipos de demonstração; um número notável de generalizações; e um número ainda maior de aplicações de interesse.

Uma das versões equivalentes do enunciado do teorema, provavelmente a mais fácil de memorizar, é: para toda função $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ contínua existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.

Uma aplicação direta em dimensão 2 que pode ser encontrada em praticamente qualquer livro que trate o assunto é a seguinte: em um dado instante de tempo t existem dois pontos antipodais na atmosfera do planeta que têm exatamente a mesma temperatura e a mesma pressão[3].

Antes de enunciar o teorema é preciso dar a seguinte definição.

Definição 1. *Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é uma função antipodal se $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in S^n$.*

Agora estamos prontos para enunciar o Teorema de Borsuk-Ulam, em todas as suas versões equivalentes.

Teorema 1 (Teorema de Borsuk-Ulam)**.** *Para todo $n \geq 0$ são verdadeiras as seguintes afirmações:*

1.a *Para toda função $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ contínua existe um ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*[4]

1.b *Para toda função $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ contínua e antipodal existe um ponto $\overline{x} \in S^n$ tal que $f(\overline{x}) = 0$.*

2.a *Não existe nenhuma função contínua e antipodal de $S^n \to S^{n-1}$.*

2.b *Não existe nenhuma aplicação contínua $f : B^n \to S^{n-1}$ antipodal na fronteira, i.e. tal que $f(x) = -f(-x)$ para todo $x \in \partial B^n = S^{n-1}$.*

3.a *Para qualquer cobertura $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n+1}\}$ de S^n por $n+1$ conjuntos fechados existe ao menos um $\mathcal{F}_i$ tal que $\mathcal{F}_i \bigcap (-\mathcal{F}_i) \neq \emptyset$, ou seja, que contém um par de pontos antipodais.*

3.b *Para qualquer cobertura $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \ldots, \mathcal{O}_{n+1}\}$ de S^n por $n+1$ conjuntos abertos existe ao menos um $\mathcal{O}_i$ tal que $\mathcal{O}_i \bigcap (-\mathcal{O}_i) \neq \emptyset$, ou seja, contém um par de pontos antipodais.*

[1] Karol Borsuk (1905-1982).

[2] Stanislaw M. Ulam (1909-1984).

[3] Obviamente supondo que as duas sejam funções contínuas.

[4] A única referência da ligação entre Ulam e o teorema é do artigo original de Borsuk ([3]), onde uma nota de rodapé afirma que esta versão do teorema foi proposta por Ulam como uma conjectura.

A fim de entender o significado do teorema demonstremos a equivalência entre suas versões.

1.a$\Longrightarrow$*1.b*: Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função antipodal e contínua. Então, por *1.a*, existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x) = -f(x)$, sendo a última igualdade válida pois f é antipodal por hipótese. Mas isso só é possível caso $f(x) = 0$.

1.b$\Longrightarrow$*1.a*: Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua qualquer. Seja $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(x) = f(x) - f(-x)$. Obviamente g é antipodal e então, de *1.b*, segue que existe $\overline{x} \in S^n$ tal que $g(\overline{x}) = 0$ e daí, como queríamos, $f(\overline{x}) = f(-\overline{x})$.

1.b$\Longrightarrow$*2.a*: Qualquer função antipodal de $S^n \to S^{n-1}$ gera uma função de S^n em $\mathbb{R}^n$ que não se anula, pois $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Fato este que contradiz *1.b*.

2.a$\Longrightarrow$*1.b*: Seja $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função antipodal e contínua que não se anula em nenhum ponto. Sob estas hipóteses podemos definir a função $\eta : S^n \to S^{n-1}$ dada por $\eta(x) = f(x)/|f(x)|$, obviamente contínua e antipodal, o que contradiz *2.a*.

2.a$\Longrightarrow$*2.b*: Sejam $\Gamma = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} \geq 0\}$ o hemisfério norte de S^n e $\pi : \Gamma \to B^n$ definida por $\pi(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, a projeção ortogonal do hemisfério Γ em B^n. Não é difícil verificar que essa função é um homeomorfismo e, portanto, possui uma inversa contínua π^{-1}. Então a existência de uma função $g : B^n \to S^{n-1}$ contínua e antipodal na fronteira $\partial B^n = S^{n-1}$ implicaria na existência de uma outra função $f : S^n \to S^{n-1}$ definida por $f(x) = g(\pi(x))$, $x \in \Gamma$, e $f(x) = -g(\pi(-x))$, $x \in S^n \setminus \Gamma$. Como por hipótese g é antipodal em ∂B^n, temos que a função f é contínua e antipodal, o que contraria *2.a*.

2.b$\Longrightarrow$*2.a*: Sejam ainda uma vez Γ e π como acima. Suponhamos a existência de uma aplicação $f : S^n \to S^{n-1}$ contínua e antipodal. Seja então $g : B^n \to S^{n-1}$ definida por $g(x) = f(\pi^{-1}(x))$. Como π é um homeomorfismo e f é contínua segue que g é também contínua. Além disso, π mantém fixo o conjunto ∂B^n e, como f é, por hipótese, antipodal neste conjunto, seque que g é antipodal ali também, o que contraria *2.b*.

1.a$\Longrightarrow$*3.a*: Seja $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n+1}\}$ uma cobertura qualquer de S^n por conjuntos fechados e $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = (d(x, \mathcal{F}_1); d(x, \mathcal{F}_2); \ldots; d(x, \mathcal{F}_n))$. Por *1.a*, existe um certo ponto $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$. Então, caso $d(x, \mathcal{F}_i) = d(-x, \mathcal{F}_i) = 0$ para algum $1 \leq i \leq n$, vale que x e $-x$ estão em $\mathcal{F}_i$. Caso contrário como, por hipótese, $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n+1}\}$ cobre a esfera, valerá que x e $-x$ estão em $\mathcal{F}_{n+1}$.

3.a$\Longrightarrow$*2.a*: Suponhamos por absurdo que exista $f : S^n \to S^{n-1}$ contínua e antipodal. Seja então Λ um n-simplexo[5] centrado na origem de $\mathbb{R}^n$ sem seu interior. Sabemos que o conjunto das $n+1$ faces de Λ é homeomorfo a S^{n-1} e, assim, as pré-imagens de cada uma destas faces por tal homeomorfismo formam uma cobertura de S^{n-1} por $n+1$ conjuntos fechados, digamos $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n+1}\}$, tal que nenhum deles contém um par de pontos antipodais. Valendo isso, concluímos, pela continuidade de f, que os fechados $f^{-1}(\mathcal{F}_i)$ formam uma cobertura de S^n que não contém nenhum par de pontos antipodais, o que é absurdo por *3.a*.

3.a$\Longrightarrow$*3.b*: Seja $\{\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \ldots, \mathcal{O}_{n+1}\}$ uma cobertura de S^n por abertos. Para cada $x \in \mathcal{O}_i$ seja V_i^x uma vizinhança aberta de x tal que $\overline{V_i^x} \subset \mathcal{O}_i$ [6]. Pela compacidade da esfera sabemos que, para cada i, existe um subconjunto finito $\Gamma_i \subset \mathcal{O}_i$ tal que $\{V_i^x, 1 \leq i \leq n+1; x \in \Gamma_i\}$ é uma cobertura de S^n por abertos. Seja então, para cada i, o fechado $\mathcal{F}_i = \cup\{\overline{V_i^x}, x \in \Gamma_i\}$. Claramente os $\mathcal{F}_i$'s cobrem S^n e vale que $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{O}_i$. Assim, por *3.a*, existe i tal que $\mathcal{F}_i$ contém um par de pontos antipodais e, portanto, $\mathcal{O}_i$ também.

3.b$\Longrightarrow$*3.a*: Seja $\{\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_{n+1}\}$ uma cobertura de S^n por fechados. Tomamos então os conjuntos abertos: $U_i^\varepsilon = \{x \in S^n; d(x, \mathcal{F}_i) < \varepsilon\}$ para $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Para cada ε, os U_i^ε formam uma cobertura de S^n por abertos. Logo, por *3.b*, existe, para cada ε, um i tal que U_i^ε contém um par de pontos antipodais. Construímos então para $\varepsilon_j = \frac{1}{j}$, $j \in \mathbb{N}$ a sequência $s = \{x_j \in S^n, j \in \mathbb{N}\}$ dos pontos pertencentes aos pares antipodais que pertencem a um mesmo $U_{i_j}^{\varepsilon_j}$, uma vez fixado ε_j. Pela compacidade da esfera, existe uma subsequência $s' = \{x_k,\ k \in$

[5] O leitor encontrará a definição de simplexo no início da Seção 3.
[6] Podemos tomar tais abertos pois S^n é um espaço regular.

$\mathbb{N}\} \subset s$ convergente. Seja $\overline{x}$ o limite de tal sequência. Pela definição da sequência s temos que $\overline{x} \in \mathcal{F}_i$ para algum i, pois, pela continuidade da métrica, vale que $\lim d(x_k, \mathcal{F}_i) = d(\overline{x}, \mathcal{F}_i) = \lim \varepsilon_j = 0$ e, por hipótese, cada $\mathcal{F}_i$ é fechado. Assim, para tal i, vale que $\mathcal{F}_i$ contém o par $\{\overline{x}, -\overline{x}\}$.

Uma vez demonstradas as equivalências, faremos uma demonstração do enunciado *1.a* para o caso em que $n = 1$ utilizando somente fatos de cálculo elementar.

Teorema 2. *Seja $f : S^1 \to \mathbb{R}$ contínua. Então existe um ponto $\bar{x} \in S^1$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demonstração. Seja $e : [0,1] \to S^1$ tal que $e(t) = (\cos \pi t, \operatorname{sen} \pi t)$. Claramente, e é contínua. Definimos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $g(t) = f(e(t)) - f(-e(t))$; g é contínua, pois f e e também o são. Vale que $g(1) = f((-1,0)) - f((1,0) = -[f((1,0) - f((-1,0))] = -g(0)$. Caso $g(1)g(0) \leq 0$, pelo Teorema do Valor Intermediário existe $\bar{t} \in [0,1]$ tal que $g(\bar{t}) = 0$. Se $\bar{x} = e(\bar{t}) \in S^1$, então $f(\bar{x}) - f(-\bar{x}) = 0$ e, portanto, $f(\bar{x}) = f(-\bar{x})$. □

Feito isto demonstremos agora, fazendo uso de *2.b*, o célebre Teorema do Ponto Fixo de Brouwer[7].

Teorema 3 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer)**.** *Seja $f : B^n \to B^n$ uma função contínua. Então f possui um ponto fixo.*

Demonstração. Supondo que $f : B^n \to B^n$ não possua pontos fixos definamos $g : B^n \to S^{n-1}$ como a função que associa a $x \in B^n$ o ponto dado pela intersecção da semirreta de origem em $f(x)$ que passa por x com $\partial B = S^{n-1}$. Escrevendo explicitamente g em função de f é fácil perceber que a mesma é contínua, igual à identidade em ∂B e, assim, antipodal nesse conjunto. Mas a existência de tal função contradiz *2.b*, o que é absurdo. □

Antes de partirmos para a demonstração faremos aqui uma aplicação simples do Teorema de Borsuk-Ulam em dimensão 2 que generaliza um surpreendente resultado obtido a partir do Teorema de Bolzano, apresentado no livro *What is Mathematics?*, de R. Courant e H. Robbins ([1]).

Suponhamos duas cidades, digamos, C e D, que sejam interligadas por uma linha férrea qualquer. Suponhamos também um trem que percorre essa linha segundo alguma lei horária qualquer $S(t)$. Em um dos vagões colocamos uma agulha de comprimento igual a uma unidade, com a ponta apoiada no chão (e fixa) de forma que o movimento da agulha sofra influência apenas da força gravitacional e da aceleração de trem. Parametrizamos a posição da mesma pela projeção da cabeça da agulha no chão do vagão. Como a agulha tem comprimento unitário sua posição pode assumir qualquer valor dentro do disco unitário B^2. Suponhamos adicionalmente que a ponta da agulha não se mova e que, uma vez que a cabeça da agulha caia no chão, ou seja, sua posição esteja em S^1, ela permaneça nessa mesma posição até o fim da viagem. O desafio é demonstrar, supondo que a posição final da agulha ao chegar na cidade D varie continuamente com a posição inicial na cidade C, se existe alguma posição inicial para a qual a agulha chega em D sem cair. Para tal, suponhamos por absurdo o contrário. Seja $f : B^2 \to B^2$ a função que associa a cada posição inicial da agulha em C a posição da mesma ao chegar em D. Temos, por hipótese, que f é contínua e, como a agulha sempre cai durante o percurso, sua imagem é, na verdade, S^1. Dado que se a agulha começa a viagem em algum ponto de S^1 ela permanece na mesma posição, f é a identidade quando restrita a S^1, e portanto é antipodal nesse conjunto. Mas isso é um absurdo, pelo Teorema de Borsuk-Ulam. Portanto, independentemente da lei horária que é obedecida pelo trem, concluímos surprendentemente que existe ao menos uma posição inicial para a qual a agulha chega à cidade D sem cair.

2 Uma ideia geométrica da demonstração

Apresentemos agora uma ideia da demonstração de *1.b*. Manteremos nesta seção a discussão em um nível informal e intuitivo, a fim de motivar o leitor, e, posteriormente, após alguns desenvolvimentos preliminares,

[7] Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966).

apresentaremos uma demonstração rigorosa do resultado, fazendo uso de aproximações lineares.

Supondo $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e antipodal mostraremos que ela se anula em algum ponto. Para tal tomemos $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ a projeção ortogonal de S^n em $\mathbb{R}^n$. É fácil perceber que g é ela mesma antipodal e, além disso, possui dois zeros, nominalmente $n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ e $s = (0, 0, \ldots, 0, -1)$, os polos norte e sul da esfera. Consideremos então o espaço $X = S^n \times [0, 1]$ e a função $F : X \to \mathbb{R}^n$ dada por $F(x, t) = (1 - t)g(x) + tf(x)$. Denotaremos por *esfera superior* o subconjunto $S^n \times \{1\}$ de X e por *esfera inferior* o subconjunto $S^n \times \{0\}$ de X.

Estendendo a transformação antipodal de S^n para X definamos ν em X dada por $\nu(x, t) = (-x, t)$ como sendo a antípoda em X. Obviamente F é antipodal sob esta definição, pois

$$\begin{aligned} F(\nu(x,t)) &= F(-x,t) = (1-t)g(-x) + tf(-x) \\ &= (1-t)(-g(x)) + t(-f(x)) \\ &= -F(x,t)\,. \end{aligned}$$

Suponhamos por absurdo que f não possua nenhum zero. Temos então que F possui dois zeros na esfera inferior e nenhum na esfera superior. Tomemos assim o conjunto $\chi = F^{-1}(0)$. Caso f seja genérica suficientemente teremos que χ será uma variedade unidimensional compacta em X, portanto composta de ciclos que não intersectam as esferas superior e inferior, e caminhos que ligam os zeros das esferas.

Pela construção de F sabemos que ela não possui nenhum zero na esfera superior e apenas os polos norte e sul na esfera inferior. Assim, concluímos que χ possui apenas ciclos e um caminho γ que liga $(n, 0)$ a $(s, 0)$. Mas como F é antipodal segue que γ deve ser simétrico quando percorrido a partir de n ou de s e assim, considerando a geometria de X, concluímos que as duas pontas não podem se encontrar, o que é absurdo.

Notemos que o problema com essa "demonstração" são os fatos assumidos e não propriamente justificados sobre χ. É justamente esta imprecisão que nos impõe a necessidade dos desenvolvimentos que seguem na próxima seção.

3 Preparativos para a demonstração

Primeiramente daremos aqui definições dos termos usados durante o resto do artigo geralmente não conhecidos por estudantes que nunca tiveram contato com a topologia algébrica.

Dados $n+1$ vetores quaisquer $\{v_0, v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^N$, dizemos que $\Delta = \{x \in \mathbb{R}^N, x = \alpha_0 v_0 + \ldots + \alpha_n v_n, \alpha_0 + \ldots + \alpha_n = 1, \alpha_i \geq 0\}$ é sua *envoltória convexa*. Denotaremos aqui por *simplexo* a envoltória convexa de um conjunto de vetores como acima tais que $\{v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0\}$ seja linearmente independente[8]. Diremos, nesse caso, que os v_i's são os vértices de Δ. É claro que para qualquer simplexo dado a envoltória convexa de um subconjunto dos seus vértices é também um simplexo. Tais conjuntos são ditos *faces* de Δ. Diremos que se um simplexo possui $n+1$ vértices então ele é um *simplexo n-dimensional*, ou um *n-simplexo*. Definimos um *complexo simplicial finito* como um conjunto $\mathbb{T}$ finito de simplexos que satisfaçam as seguintes propriedades:

(1) Se Δ é um simplexo de $\mathbb{T}$ então qualquer face $\delta \subset \Delta$ é também um simplexo de $\mathbb{T}$.

(2) Dois simplexos de $\mathbb{T}$ se intersectam em uma face ou não se intersectam.

Por simplicidade, trataremos aqui somente de complexos finitos, e portanto omitiremos a palavra finito no que se segue.

Definimos o *poliedro de um complexo simplicial* $\mathbb{T}$ como a união de todos os seus simplexos e o denotaremos por $|\mathbb{T}|$.

Definimos também uma *triangularização* de um subconjunto S de $\mathbb{R}^N$ como um par $(\mathbb{T}, h)$ em que $\mathbb{T}$ é um complexo simplicial e h é um homeomorfismo entre S e o poliedro $|\mathbb{T}|$. Por simplicidade, nesses casos, omitiremos o homeomorfismo h dizendo apenas que $\mathbb{T}$ é uma triangularização de S e sempre admitiremos, automaticamente, que foi feita a identificação entre $\mathbb{T}$ e $h(\mathbb{T})$.

Trataremos agora de algumas construções sobre complexos simpliciais, e demonstraremos alguns resultados relevantes sobre as mesmas.

[8] Obviamente aqui supomos $N \geq n$.

Dizemos que um complexo simplicial $\mathbb{S}$ é um refinamento de $\mathbb{T}$ se cada simplexo $\Delta \in \mathbb{S}$ está contido em um simplexo de $\mathbb{T}$ e se cada simplexo de $\mathbb{T}$ é o poliedro de um conjunto finito de simplexos de $\mathbb{S}$.

Dado um complexo simplicial $\mathbb{T}$ existe um processo para se obter a partir dele um refinamento especial denominado *subdivisão baricêntrica*. A subdivisão baricêntrica possui diversas propriedades importantes, sendo a mais relevante dela expressa no seguinte lema.

Lema 4. *Seja $\mathbb{T}$ um complexo simplicial qualquer e $\epsilon > 0$ um numero real. Então existe um numero natural $N(\epsilon)$ de forma que se fizermos a subdivisão baricêntrica de $\mathbb{T}$ $N(\epsilon)$ vezes consecutivas obteremos um refinamento deste para o qual o diâmetro de qualquer simplexo é menor que ϵ.*

Sugerimos [4] ao leitor interessado em mais informações sobre subdivisões baricêntricas.

Seja $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um complexo simplicial qualquer. Denotamos por $\mathcal{V}(\mathbb{T})$ o conjunto dos vértices de $\mathbb{T}$. Seja $f : |\mathbb{T}| \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua qualquer. Dizemos que $\overline{f}$ é a *aproximação simplicial afim* (ou, simplesmente, *aproximação simplicial*) de f se $\overline{f}$ concorda com f em $\mathcal{V}(\mathbb{T})$ e, para cada simplexo $\Delta \subset \mathbb{T}$, $\overline{f}$ é estendida de modo afim para o restante de Δ[9] . Ou seja, se $v_1, v_2, \ldots, v_k$ são os vértices de Δ e α é um ponto em Δ tal que $\alpha = \sum \alpha_i v_i$ com $\sum \alpha_i = 1$, então $\overline{f}(\alpha) = \sum \alpha_i f(v_i)$. Pode-se constatar que tais aproximações simpliciais são funções contínuas.

Muito importante para o que se segue é o fato de que dado um complexo simplicial $\mathbb{T}$ tal que $|\mathcal{V}(\mathbb{T})| = N$, o conjunto de todas as aproximações simpliciais de funções de $|\mathbb{T}|$ em $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial real de dimensão $n \times N$ e, portanto, isomorfo a $\mathbb{R}^{n\times N}$. A constatação de tal fato é trivial, uma vez que percebamos que a aproximação $\overline{f}$ está univocamente determinada depois de fixados os valores em $\mathbb{R}^n$ de f em cada um dos N vértices de $\mathbb{T}$.

Um teorema fundamental para a demonstração é o de que, dada uma função contínua qualquer $f : |\mathbb{T}| \to \mathbb{R}^n$, para um refinamento fino o suficiente de $\mathbb{T}$ vale que f pode ser uniformemente aproximada por sua aproximação simplicial. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe um certo $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\mathbb{S}$ é um refinamento de $\mathbb{T}$ tal que cada simplexo de $\mathbb{S}$ possui diâmetro menor ou igual a $\delta(\varepsilon)$ então a aproximação simplicial F de f sobre $\mathbb{S}$ é tal que para qualquer $x \in |\mathbb{S}|$ vale $|F(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Esse teorema pode ser demonstrado utilizando-se a continuidade uniforme de f sobre o compacto $|\mathbb{T}|$ e o Lema 4 (para uma referência mais completa, vide [4]).

Dizemos que uma função é afim caso ela seja aproximação simplicial de alguma outra função. Além disso, dizemos que uma função afim f definida em um complexo simplicial $\mathbb{T}$ de dimensão $n+1$ assumindo valores em $\mathbb{R}^n$ é genérica se o conjunto $\chi = f^{-1}(0)$ não intersecta nenhum simplexo de dimensão menor que n.

Um fato importante a ser demonstrado é que uma condição suficiente, mas não necessária, para que uma dada função afim $f : \Delta \to \mathbb{R}^n$, em que Δ é um simplexo de dimensão $n+1$, seja genérica é que, se $\mathcal{V}(\Delta) = \{v_0, v_1, \ldots, v_{n+1}\}$, o conjunto $\mathcal{B} = f([\mathcal{V}(\Delta) \setminus \{v_i, v_j\}])$ seja l.i. em $\mathbb{R}^n$ para quaisquer $0 \leq i, j \leq n+1$. Isso decorre do fato de que se algum α pertence a um simplexo de dimensão k menor que n então ele pode ser expresso como combinação linear de k dos $v_i's$; ou seja

$$\alpha = \sum_{k=0\, k\neq i,\, j}^{n+1} \alpha_k v_k \,,$$

para certos i, j entre 0 e $n+1$. Assim, $f(\alpha) = 0$ somente se o conjunto dos $f(v_i)$'s, para os v_i's dos quais α é combinação linear, for l.d. em $\mathbb{R}^n$. Portanto, se $\mathbb{T}$ é um $(n+1)$-complexo simplicial e $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ uma função afim, é suficiente para que ela seja genérica que a condição definida acima seja verificada em cada simplexo de dimensão n em $\mathbb{T}$.

Além disso, garantimos com esta conclusão que, caso uma função f seja genérica, χ será, em cada simplexo $(n+1)$-dimensional de Δ, um subespaço afim unidimensional, ou seja, um segmento de reta com extremidades nas faces n-dimensionais de Δ, ou vazio.

As condições suficientes enunciadas acima nos garantem que uma função é não genérica somente se um produto de determinantes, associados à dependência linear dos valores de f nos vértices de cada simplexo de $\mathbb{T}$, se anula e, portanto, podemos concluir que o con-

[9] Pode-se dizer que a aproximação simplicial de f é a *extensão afim* da restrição de f aos vértices de $\mathbb{T}$.

junto das funções não genéricas tem interior vazio, pois está contida na pré-imagem de zero de um certo polinômio não nulo em algum espaço $\mathbb{R}^M$. Este fato será fundamental para esclarecer os pontos obscuros na "demonstração" acima, pois o mesmo garante que, pelo fato do conjunto das funções não genéricas possuir interior vazio, qualquer função afim pode ser uniformemente aproximada por uma sequência de funções afins genéricas.

Definimos aqui também a noção de grafo. Dizemos que um *grafo* é uma coleção $\Gamma = \{V, A\}$, em que V é um conjunto qualquer que chamaremos de *vértices de* Γ e A é um conjunto de pares de elementos de V que denotaremos por *arestas de* Γ. Se G e F são vértices de Γ e $a = \{F, G\} \in A$ dizemos que a aresta a liga F a G. Dizemos também que a *ordem* de G é o número de arestas que ligam G a qualquer outro vértice de Γ. Muito importante no que se segue é o seguinte lema sobre grafos.

Lema 5. *Seja Γ um grafo para o qual cada vértice possui ordem igual a 1 ou 2. Então cada componente conexa de Γ é ou um ciclo, caso contenha apenas vértices de ordem 2, ou um caminho que liga vértices de ordem 1, caso contrário.*

Para a demonstração do lema acima, ou mais sobre teoria de grafos, vide [5].

Em um complexo simplicial $(n+1)$-dimensional $\mathbb{T}$ temos que o conjunto dos simplexos que possuem intersecção não vazia com o conjunto χ dos zeros de uma função afim genérica f é um grafo se considerarmos os vértices como sendo os n-simplexos onde f se anula, e as arestas os $(n+1)$-simplexos onde ela se anula, pois como f é genérica, em cada $(n+1)$-simplexo Δ que tem intersecção não vazia com χ vale que $\chi \cap \Delta$ é um subespaço afim unidimensional em Δ que tem extremidades em duas faces n dimensionais de Δ onde f se anula.

4 Demonstrando o teorema

Uma demonstração rigorosa do resultado segue praticamente a mesma linha da demonstração intuitiva, porém envolve a aproximação da função F por funções afins genéricas, de forma a poder assim justificar as considerações feitas sobre o conjunto χ.

Dado um número $\delta > 0$, construiremos aqui uma certa triangularização de S^n, que definiremos como sua δ-triangularização. Tomemos antes de mais nada um simplexo, denotado a partir de agora por Δ_N, que contenha o polo norte da esfera em seu interior e possua diâmetro δ. Tomemos também uma cópia antípoda deste, denotada por Δ_S. Fixados esses dois simplexos, construímos uma triangularização do restante da esfera que respeite a simetria antipodal da esfera, ou seja, se Δ é um simplexo nessa triangularização então $-\Delta$ também é. Tal construção é possível pois podemos tomar apenas o hemisfério norte a menos do simplexo que contém o polo norte e, como este será compacto, construir uma triangularização do mesmo que seja antipodal na fronteira, possibilidade que pode ser justificada por indução e, a seguir, a partir desta, construir uma triangularização do restante da esfera tomando os simplexos antipodais dos simplexos no hemisfério norte. Uma vez fixada essa triangularização da esfera tomaremos então sucessivas subdivisões baricêntricas desta mantendo os simplexos Δ_S e Δ_N fixos, até que o diâmetro de cada simplexo seja menor que δ. Vale a pena ressaltar que a simetria antipodal da triangularização original será mantida pelas subdivisões baricêntricas (para tal mais uma vez remetemos o leitor a [4]).

Seja então $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função antipodal e contínua. Sejam também X e ν como definidos na Seção 2. Sabemos, por [4], que podemos construir uma triangularização $\mathbb{T}_\delta$ de X, em que cada simplexo de $\mathbb{T}_\delta$ possui diâmetro menor do que δ e tal que se σ é um simplexo de $\mathbb{T}_\delta$ então $\nu(\sigma)$ também é um simplexo de $\mathbb{T}_\delta$. Com isso, $\mathbb{T}_\delta$ contém como subcomplexos $\mathbb{T}_\delta^+$ e $\mathbb{T}_\delta^-$, δ-triangularizações das esferas superior e inferior, respectivamente.

Suponhamos agora que f não possua nenhum zero. Como f é contínua e está definida em um compacto, existe $\epsilon > 0$ tal que $|f(x)| \geq \varepsilon$ para qualquer $x \in S^n$. Como na Seção 2, seja $F : X \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x,t) = (1-t)g(x) + tf(x)$, em que $g : S^n \to \mathbb{R}^n$ é a projeção ortogonal de S^n em $\mathbb{R}^n$, e seja $F' : X \to \mathbb{R}^n$ uma aproximação simplicial de F em $\mathbb{T}_\delta$. Suponhamos também que δ seja suficientemente pequeno para que $|F'(x) - F(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $x \in S^n$.

Como g é linear, é também afim e, portanto, segue que F' coincide com g na esfera inferior e, assim, possui apenas dois zeros na esfera inferior, ambos em pontos antipodais no interior de simplexos antipodais em $\mathbb{T}_\delta^-$.

Assim, temos que F' pode ser entendida como uma função afim do poliedro do complexo simplicial $\mathbb{T}_\delta$ em $\mathbb{R}^n$ e possivelmente não genérica e, portanto, pelos resultados da Seção 3, pode ser aproximada uniformemente por funções afins genéricas. Seja $\widehat{F}$ uma dessas aproximações, que em especial coincida com g na esfera inferior, o que pode ser feito, pois como n e s estão no interior dos n-simplexos Δ_N e Δ_S, e que seja suficientemente boa para que $\left|\widehat{F}(x) - F'(x)\right| \leq \frac{\epsilon}{4}$, para todo $x \in X$, de forma que $\widehat{F}$ não possua nenhum zero na esfera superior. Por ser igual a g na esfera inferior, $\widehat{F}$ possui dois zeros nesta, explicitamente os polos n e s.

Assim, mais uma vez invocando o constatado na Seção 3, vale que o conjunto $\chi = \widehat{F}^{-1}(0)$ pode ser entendido como um grafo em que os vértices são simplexos de dimensão n onde $\widehat{F}$ se anula, e as arestas são os interiores dos $(n+1)$-simplexos onde $\widehat{F}$ se anula. Exceto pela componente conexa γ à qual pertencem os n-simplexos que contêm os polos norte e sul, cada vértice de χ tem grau 2 pois se $\widehat{F}$ se anula em uma face de um $n+1$-simplex então também deve se anular no interior do mesmo, e cada uma das faces de um $n+1$-simplexo de $\mathbb{T}_\delta$ é face de exatamente dois simplexos de dimensão $n+1$, exceto caso a face pertença a $\mathbb{T}_\delta^-$ ou $\mathbb{T}_\delta^+$, em que ela pode ser face apenas de um simplexo, e os únicos vértices de χ em $\mathbb{T}_\delta^-$ ou $\mathbb{T}_\delta^+$ são os n-simplexos que contêm os polos norte e sul que estão em γ, concluímos, pelo Lema 5, que cada uma de suas componentes conexas é um ciclo. Para a componente conexa à qual pertencem os simplexos que contêm os polos norte e sul vale que todos os seus vértices, exceto n e s, possuem ordem 2 e portanto mais uma vez o Lema 5 nos garante que γ é um caminho que liga o polo norte ao polo sul. Parametrizemos γ como uma curva contínua c de $[0,1]$ em X.

Vale que n e s são pontos antipodais e o caminho γ deve ser, por construção, simétrico pela transformação antipodal ν. Como, além disso, a curva γ não possui autointersecções, devido às propriedades de χ, vale que $c : [0, 1] \to \gamma$ é um homeomorfismo e, portanto, que a aplicação $\Gamma = c^{-1} \circ \nu \circ c : [0, 1] \to [0, 1]$ é contínua. Além disso, valem $\Gamma(0) = 1$ e $\Gamma(1) = 0$, logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\Gamma(t_0) = t_0$ e, portanto, $\nu(c(t_0)) = c(t_0)$. Mas a antípoda não possui pontos fixos em X, de forma que isso é um absurdo.

Assim, concluímos que $\widehat{F}$ deve possuir ao menos um par de zeros antipodais na esfera superior e, uma vez que ϵ é arbitrário, f também os possui e, portanto, o Teorema de Borsuk-Ulam está demonstrado.

Agradecimentos. Gostaria de agradecer aos professores: Lucília D. Borsari, por conceder a oportunidade para a realização do seminário que originou o presente trabalho, Paulo A. Martin pelas sugestões sobre a bibliografia e o incentivo para a publicação, J. C. A. Barata, pelas valiosas sugestões a respeito de detalhes na demonstração e Daniel V. Tausk pela ajuda e apoio na revisão final do trabalho. Agradeço também à FAPESP pelo apoio financeiro concedido entre março de 2008 e dezembro de 2010.

Referências

[1] COURANT, R.; ROBBINS, H.; STEWART, I. *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods.* 2. ed. New York: Oxford University Press, 1996.

[2] MATOUŠEK, J. *Using the Borsuk-Ulam Theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry.* Berlin: Springer, c2003.

[3] BORSUK, K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Mathematicae*, v. 20, p. 177–190, 1933.

[4] MUNKRES, J. *Elements of algebraic topology*. Boulder: Westview Press, 1995.

[5] CHARTRAND, G. *Introductory graph theory*. New York: Dover, 1985.

Daniel Paulino
dberen@ime.usp.br