

A RETA DE EULER E A CIRCUNFERÊNCIA DE NOVE PONTOS

Jacqueline Rojas (UFPB)

Ramón Mendoza (UFPE)

Neste trabalho apresentamos uma abordagem conceitual que nos permite enxergar em apenas uma linha (veja (4)) a maravilhosa descoberta realizada por Leonhard Euler no século XVIII de que os pontos notáveis de um triângulo: **O** (circuncentro), **G** (baricentro) e **H** (ortocentro) estão sobre uma reta, denominada, em sua homenagem, de reta de Euler. E como se tudo isto fosse pouco, conseguimos verificar com a mesma simplicidade que, num triângulo, os pontos médios dos seus lados, os pontos de Euler (são os pontos médios entre o ortocentro e cada vértice) e os pés das alturas, estão sobre uma circunferência cujo centro é o ponto médio entre **O** e **H**, e cujo raio é exatamente a metade da distância de **O** até um vértice do triângulo.

Em uma pós-graduação, cujo nome não vem ao caso¹, não muito tempo após ter introduzido alguns conceitos tais como ação de um grupo sobre um conjunto (veja [3] e [2]) e produto interno num espaço vetorial (veja [4]), achamos que seria interessante usar tal construção conceitual para abordar a descoberta, realizada por Euler no século XVIII, de que os pontos notáveis de um triângulo: **O** (circuncentro), **G** (baricentro) e **H** (ortocentro) estão sobre uma reta, denominada, em sua homenagem, de *reta de Euler*, no contexto de espaços afins. Nem tanto para mostrar que o resultado é

¹ Parafrazeando Miguel de Cervantes, que começa seu *Don Quijote de la Mancha* por “En un lugar de la Mancha, de cuyo nombre no quiero acordarme, no ha mucho tiempo que...”

válido para qualquer espaço afim, mas sobretudo pelo fato de mostrar que uma construção conceitual adequada pode nos proporcionar uma prova simples e elegante.

Após algum tempo percebemos que alguns dos alunos optaram por recorrer a representações geométricas, onde, apesar de nossos dois olhos estarem bem abertos, mal conseguíamos ver qualquer coisa. Aparentemente, naquele momento as figuras eram obstáculos que obscureciam a nossa visão e nos distraíam da essência do problema e da sua solução. De fato, o próprio Leonhard Euler (1707–1783), após perder a visão de seu olho direito, comentou: “Agora vou ter menos distração”, salientando com isto que as representações geométricas (figuras) nem sempre são o melhor instrumento no que se refere à compreensão de um determinado problema.

Outro segmento dos alunos recorreu ao uso de coordenadas, ou no melhor dos casos fez de conta que $\vec{PQ} = Q - P$ com P, Q pontos num espaço afim \mathbb{E} (veja (*) logo adiante), igualdade que só tem sentido se o conjunto \mathbb{E} estiver munido de uma “soma” (por exemplo, isto acontece se \mathbb{E} for um espaço vetorial). Precisamente em [1], Carneiro utiliza a álgebra dos números complexos para mostrar que **O**, **G** e **H** estão sobre uma reta.

Outro resultado interessante é o da existência de uma circunferência que passa pelos pontos médios dos lados de um triângulo e pelos pés das suas alturas. Este feito muitos atribuem a Euler. Mas foi só em 1820 que Brianchon e Poncelet mostraram que os três pontos médios entre o ortocentro e os vértices também pertencem à mesma circunferência, denominada oficialmente em 1842 por Terquem de “*le cercle des neuf points*” (circunferência dos nove pontos). Também denominada de circunferência de Euler (em homenagem a Euler), cir-

cunferência de Terquem, circunferência de Feuerbach (como um reconhecimento por ter provado, inspirado nos trabalhos de Euler, que a circunferência dos nove pontos é tangente à circunferência inscrita e às três circunferências ex-inscritas).

É oportuno observar que ao navegar na internet o leitor encontrará muitas referências para este assunto e temas correlatos. Uma das referências que chamou nossa atenção foi a de Villiers em [5], onde o autor apresenta uma generalização da circunferência dos nove pontos e da reta de Euler. Em poucas palavras a generalização da circunferência dos nove pontos em [5], que chamaremos (como faz jus) de cônica dos 9 pontos, afirma que: “dado um triângulo qualquer e um ponto H , os pontos médios dos seus lados, os pontos médios entre H e cada vértice e os pés das retas perpendiculares que passam por H , estão sobre uma cônica.”

1 Retas, planos e triângulos em um espaço afim

De maneira informal podemos dizer que um conjunto \mathbb{E} é um *espaço afim* sobre um espaço vetorial \mathbb{V} se for possível adicionar um ponto P de \mathbb{E} com um vetor v de \mathbb{V} de maneira que o resultado, que denotaremos por $P \oplus v$, seja um ponto de \mathbb{E} e que, para cada $P \in \mathbb{E}$ fixo, a associação $v \mapsto P \oplus v$ seja uma bijeção entre o espaço vetorial \mathbb{V} e o conjunto \mathbb{E} . Assim, podemos pensar um espaço afim como um espaço vetorial no qual todos os seus pontos têm a mesma chance de ser sua origem. Mais precisamente:

Sejam \mathbb{E} um conjunto, \mathbb{V} um espaço vetorial real e $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$ uma função que associa a cada par $(P, v) \in \mathbb{E} \times \mathbb{V}$ um ponto em \mathbb{E} , que denotaremos por $P \oplus v$, satisfazendo as seguintes condições:

- (a) para cada $P \in \mathbb{E}$, a função de \mathbb{V} em \mathbb{E} dada por $v \mapsto P \oplus v$ é uma bijeção;
- (b) $(P \oplus u) \oplus v = P \oplus (u + v)$, para quaisquer $P \in \mathbb{E}$ e $u, v \in \mathbb{V}$.

Um par (\mathbb{E}, \oplus) satisfazendo as condições acima é denominado de *espaço afim* sobre \mathbb{V} e a função \oplus é denomi-

nada de *ação transitiva sem pontos fixos*.

A seguir apresentaremos alguns exemplos de espaços afins. Começando pelo caso trivial em que o próprio conjunto \mathbb{E} é um espaço vetorial e outros não tão triviais em que o conjunto \mathbb{E} não é um espaço vetorial.

Exemplo 1. Sejam \mathbb{V} um espaço vetorial sobre \mathbb{R} , \mathbb{E} um subespaço vetorial de \mathbb{V} e $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$ a adição de vetores em \mathbb{V} (i.e. $P \oplus v = P + v$). Observe que o par (\mathbb{E}, \oplus) é um espaço afim sobre \mathbb{V} se e somente se $\mathbb{V} = \mathbb{E}$.

Exemplo 2. Seja \mathbb{V} um subespaço vetorial de \mathbb{W} e $\mathbb{E} = Q + \mathbb{V}$, para algum $Q \in \mathbb{W}$. Tome $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$ a adição de vetores em \mathbb{W} (isto é, $P \oplus v = P + v$). Ou seja, a translação de um subespaço vetorial \mathbb{V} é um espaço afim sobre \mathbb{V} .

Exemplo 3. Sejam $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear não nula e w um vetor não nulo na imagem de T . Sejam $\mathbb{V} = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ (o núcleo de T), $\mathbb{E} = \{v \in V \mid T(v) = w\}$ (a imagem inversa de w por T) e $\oplus : \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$ dada pela adição de vetores em V . Observe que \mathbb{E} não é um espaço vetorial e o par (\mathbb{E}, \oplus) é um espaço afim sobre \mathbb{V} .

Embora o exemplo a seguir seja um caso particular do exemplo acima, salientamos sua importância para o leitor que tem familiaridade com o conceito de *conexão num fibrado principal*, que poderá vislumbrar a prova de que o conjunto das conexões num fibrado principal é um espaço afim.

Exemplo 4. Sejam \mathcal{P}, \mathcal{G} espaços vetoriais sobre \mathbb{R} e \mathcal{V} um subespaço não-nulo de \mathcal{P} isomorfo a \mathcal{G} . A seguir denotaremos por $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ (respectivamente, $\mathcal{L}_{\mathcal{V}}$ e $\mathcal{L}_{\mathcal{G}}$) o espaço vetorial formado pelas transformações lineares de \mathcal{P} (respectivamente, de \mathcal{V} e de \mathcal{G}) em \mathcal{G} . Além disso considere $\iota : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{P}$ a transformação linear induzida pela inclusão de \mathcal{V} em \mathcal{P} (i.e. $\iota(x) = x$) e $L : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{G}$ um isomorfismo linear.

Observe que a transformação linear ι nos permite (via composição) associar a cada transformação linear $\omega \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}}$ a transformação linear $\omega \circ \iota \in \mathcal{L}_{\mathcal{V}}$, que denotaremos por $\omega|_{\mathcal{V}}$, conforme ilustra o diagrama a seguir

$$\mathcal{V} \xrightarrow{\iota} \mathcal{P} \xrightarrow{\omega} \mathcal{G}.$$

De fato, esta associação nos permite definir a transformação linear

$$T: \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathcal{L}_{\mathcal{V}} \\ \omega \longmapsto \omega|_{\mathcal{V}}.$$

Assim, como uma aplicação do Exemplo 3, temos que $\mathbb{E} = \{\omega \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid \omega|_{\mathcal{V}} = L\}$ é um espaço afim sobre $\mathbb{V} = \{\omega \in \mathcal{L}_{\mathcal{P}} \mid \omega|_{\mathcal{V}} = 0\}$ onde a ação $\oplus: \mathbb{E} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{E}$ é definida pela adição em $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$, ou seja, $(\omega \oplus \eta)(p) = \omega(p) + \eta(p)$ para todo $p \in \mathcal{P}$.

Salientamos que as observações apresentadas a seguir serão de grande valia no desenvolvimento desta exposição.

- A condição (a) na definição da ação nos permite concluir que dados P e $Q \in \mathbb{E}$ existe um único vetor $v \in \mathbb{V}$ tal que $P \oplus v = Q$. Assim usaremos a seguinte notação:

$$(*) \quad \text{Dados } P, Q \in \mathbb{E}, \overrightarrow{PQ} \text{ denotará o único} \\ \text{vetor em } \mathbb{V} \text{ tal que } P \oplus \overrightarrow{PQ} = Q.$$

- $P \oplus \vec{0} = P$ para todo $P \in \mathbb{E}$.

De fato, dado $P \in \mathbb{E}$ segue-se de (a) que existe um único $v \in \mathbb{V}$ tal que $P \oplus v = P$. Por outro lado, a partir de (b) temos $P \oplus \vec{0} = P \oplus (v + (-v)) = (P \oplus v) \oplus (-v) = P \oplus (-v)$. Agora, tendo em consideração que $v \mapsto P \oplus v$ é injetiva, concluímos que $\vec{0} = -v$. Portanto, $v = \vec{0}$.

- Assim, dados P e Q em \mathbb{E} verifica-se que $\overrightarrow{PQ} = \vec{0}$ se e somente se $P = Q$.

- Dados P, Q e R em \mathbb{E} temos que: $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (em particular, $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$).

Intuitivamente, podemos imaginar que a cada par de pontos $(P, Q) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$ estamos associando uma seta com ponto inicial em P e extremo final em Q .

Retas, planos e triângulos

É importante ter em mente que os espaços afins podem ser pensados como uma generalização dos espaços vetoriais, já que um espaço afim \mathbb{E} sobre \mathbb{V} é uma cópia do espaço vetorial \mathbb{V} . Assim, o leitor pode se reportar ao estudo realizado nos cursos de geometria analítica e/ou cálculo vetorial, no que se refere à posição relativa entre pontos, retas e planos (como também na determinação de retas e planos).

A partir deste momento trabalharemos sob a suposição de que $\dim \mathbb{V} \geq 2$. Sejam $P, Q \in \mathbb{E}$ e $u, v \in \mathbb{V}$ linearmente independentes. Denotaremos por $\mathcal{R}(P, v)$ a *reta* em \mathbb{E} que passa por P com vetor diretor v , definida por

$$\mathcal{R}(P, v) = \{P \oplus tv \in \mathbb{E} \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Por exemplo, se A e B forem pontos distintos em \mathbb{E} a reta $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB})$ passa por A e B (pois $A = A \oplus 0 \cdot \overrightarrow{AB}$ e $B = A \oplus \overrightarrow{AB}$). Por outro lado, tendo em consideração que as retas $\mathcal{R}(P, v)$ e $\mathcal{R}(Q, u)$ são iguais se e somente se os vetores \overrightarrow{PQ} e u são múltiplos de v (ou, equivalentemente, os vetores \overrightarrow{PQ} e v são múltiplos de u), conclui-se que $\mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB})$ é a única reta em \mathbb{E} que passa por A e B . Por simplicidade, denotaremos tal reta por $\mathcal{R}_{A,B}$ (ou seja, $\mathcal{R}_{A,B} = \mathcal{R}(A, \overrightarrow{AB})$).

De maneira análoga denotaremos por $\mathcal{P}(P, u, v)$ o *plano* em \mathbb{E} que passa por P com vetores diretores u e v , definido por:

$$\mathcal{P}(P, u, v) = \{P \oplus (su + tv) \in \mathbb{E} \mid s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Observe que se u_1, v_1 forem vetores linearmente independentes em \mathbb{V} , os planos $\mathcal{P}(P, u, v)$ e $\mathcal{P}(Q, u_1, v_1)$ são iguais se e somente se os vetores \overrightarrow{PQ} , u_1 e v_1 pertencem ao subespaço gerado por u e v .

Sejam A, B e C três pontos em \mathbb{E} . Diremos que os pontos A, B e C determinam o *triângulo* ABC em \mathbb{E} se

e somente se os vetores \vec{AB} e \vec{AC} forem linearmente independentes em \mathbb{V} . Os pontos A , B e C serão denominados de vértices do triângulo ABC . Observe que a condição dos vetores \vec{AB} e \vec{AC} serem linearmente independentes em \mathbb{V} é invariante por permutação dos vértices do triângulo ABC , e implica que:

- (i) os pontos A , B e C são dois a dois distintos;
- (ii) os pontos A , B e C não são colineares (isto decorre do fato que existe uma única reta passando por A e B , a saber, $\mathcal{R}(A, \vec{AB})$ e a condição $C \in \mathcal{R}(A, \vec{AB})$ é equivalente à condição $C = A \oplus t\vec{AB}$ para algum $t \in \mathbb{R}$, i.e. $\vec{AC} = t\vec{AB}$).

A seguir mostraremos que se os pontos A , B e C determinam um triângulo em \mathbb{E} então existe um único plano em \mathbb{E} passando por A , B e C . Esse plano será denotado por $\mathcal{P}_{A,B,C}$.

Existência: Os pontos A , B e C pertencem ao plano $\mathcal{P}(A, \vec{AB}, \vec{AC})$. De fato, $A = A \oplus (0 \cdot \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC})$, $B = A \oplus (\vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC})$ e $C = A \oplus (0 \cdot \vec{AB} + \vec{AC})$.

Unicidade: Se $\mathcal{P}(P, u, v)$ é um plano contendo A , B e C , então \vec{PA} , \vec{PB} e \vec{PC} pertencem ao subespaço gerado por u e v . Agora, tendo em consideração que $\vec{AB} = \vec{PB} - \vec{PA}$ e $\vec{AC} = \vec{PC} - \vec{PA}$ concluímos que os vetores \vec{AB} e \vec{AC} também pertencem ao subespaço gerado por u e v . Portanto os planos $\mathcal{P}(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ e $\mathcal{P}(P, u, v)$ são iguais.

A próxima subseção trata do que podemos chamar de *propriedade universal dos pontos no plano* $\mathcal{P}_{A,B,C}$. Esta abordagem pode, à primeira vista, dar a impressão de que queremos dar uma definição artificial, mas como veremos este é um dos pontos chaves na prova de (C) (a circunferência dos nove pontos).

Propriedade universal de pontos num plano

Fixe o plano $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{A,B,C}$ em \mathbb{E} . Observe que todo ponto P do plano \mathcal{P} pode ser colocado de maneira única na forma $P = A \oplus (\beta \cdot \vec{AB} + \gamma \cdot \vec{AC})$ com $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ou seja, $\vec{AP} = \beta \cdot \vec{AB} + \gamma \cdot \vec{AC}$. Agora considere um ponto

qualquer $O \in \mathbb{E}$, então $\vec{AO} + \vec{OP} = \beta \cdot (\vec{AO} + \vec{OB}) + \gamma \cdot (\vec{AO} + \vec{OC})$, que implica $\vec{OP} = (1 - \beta - \gamma)\vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC}$. A propriedade universal que iremos enunciar a seguir nos garante que a representação de $P \in \mathbb{E}$ na forma $P = O \oplus (\alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC})$, com $\alpha = 1 - \beta - \gamma$ ($\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ fixos) independe da escolha do ponto $O \in \mathbb{E}$.

(U) Propriedade universal de pontos em \mathcal{P} . *Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Então existe um único ponto $P \in \mathcal{P}$ tal que $\alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} = \vec{OP}$, $\forall O \in \mathbb{E}$.*

De fato, dados $O \in \mathbb{E}$ e $v = \alpha \cdot \vec{OA} + \beta \cdot \vec{OB} + \gamma \cdot \vec{OC} \in \mathbb{V}$ com $\alpha + \beta + \gamma = 1$, considere $P = O \oplus v \in \mathbb{E}$, ou seja, $v = \vec{OP}$. Por outro lado, sejam $O_1, P_1 \in \mathbb{E}$ e $v_1 = \alpha \cdot \vec{O_1A} + \beta \cdot \vec{O_1B} + \gamma \cdot \vec{O_1C} \in \mathbb{V}$ tais que $v_1 = \vec{O_1P_1}$. Note que, $v_1 = \alpha \cdot (\vec{O_1O} + \vec{OA}) + \beta \cdot (\vec{O_1O} + \vec{OB}) + \gamma \cdot (\vec{O_1O} + \vec{OC}) = \vec{O_1O} + v$. Entretanto, também $v_1 = \vec{O_1O} + \vec{OP_1}$. Logo, $v = \vec{OP} = \vec{OP_1}$, de onde concluímos que $\vec{O} = \vec{OP} - \vec{OP_1} = \vec{P_1P}$. Portanto, $P_1 = P$.

Por exemplo, os seguintes pontos no triângulo ABC podem ser caracterizados pela propriedade universal.

O ponto médio O *ponto médio* entre A e B é o único ponto $M_{AB} \in \mathbb{E}$ tal que

$$M_{AB} = O \oplus \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \tag{1}$$

para todo $O \in \mathbb{E}$. Observe que M_{AB} é determinado pela escolha de $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = 0$ em (U). Note também que $M_{AB} = A \oplus \frac{1}{2}\vec{AB}$ (fazendo $O = A$ em (1)).

O ponto G Escolha $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$ em (U). Seja \mathbf{G} o único ponto no plano \mathcal{P} tal que

$$\mathbf{G} = O \oplus \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \tag{2}$$

para todo $O \in \mathbb{E}$. A seguir verificaremos que o ponto \mathbf{G} pertence a cada uma das medianas (retas que passam por um vértice e o ponto médio do lado oposto) do triângulo ABC , ou seja, \mathbf{G} é o *baricentro* do triângulo ABC .

Por simplicidade no que se segue do texto, dado um triângulo ABC em \mathbb{E} denotaremos o ponto médio do

lado AB , BC e CA por M_C , M_A e M_B , respectivamente, conforme ilustra a Figura 1.

Agora seja \mathcal{R}_{A,M_A} a mediana que passa pelo vértice A e pelo ponto médio M_A do lado BC e escolha $O = A$ em (2). Então $\mathbf{G} = A \oplus \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = A \oplus \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}) = A \oplus \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM_A}) = A \oplus \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_A}$. Portanto $\mathbf{G} \in \mathcal{R}_{A,M_A}$. Por raciocínio análogo, conclui-se que $\mathbf{G} = B \oplus \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_B}$ e $\mathbf{G} = C \oplus \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_C}$.

A seguir, fixe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ em \mathbb{V} (veja [4], p. 122). Dados dois pontos P e Q em \mathbb{E} , denotaremos a *distância entre P e Q* (ou comprimento do segmento determinado pelos pontos P e Q) por $d(P, Q)$, em que $d(P, Q)$ é o único inteiro não negativo cujo quadrado é igual a $\langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle$, ou seja, $d(P, Q)^2 = \langle \overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PQ} \rangle$.

O ponto I Denotemos por a , b e c os comprimentos dos lados BC , AC e AB , respectivamente. Seja $p = a + b + c$ o perímetro do triângulo ABC . Seja \mathbf{I} o único ponto no plano \mathcal{P} tal que $\mathbf{I} = O \oplus (\frac{a}{p} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{b}{p} \cdot \overrightarrow{OB} + \frac{c}{p} \cdot \overrightarrow{OC})$ para todo $O \in \mathbb{E}$. Deixamos ao leitor a tarefa de verificar que \mathbf{I} é o *incentro* (ponto de intersecção das bissetrizes) do triângulo ABC .

Outro desafio é determinar as coordenadas α, β e γ em (U) do *circuncentro* \mathbf{O} (ponto de intersecção das mediatrizes) e do *ortocentro* \mathbf{H} (ponto de intersecção das alturas) do triângulo ABC , que serão apresentados neste momento pelas seguintes definições.

O ponto O Seja $\mathbf{O} \in \mathcal{P}$ o único ponto tal que $d(\mathbf{O}, A) = d(\mathbf{O}, B) = d(\mathbf{O}, C)$.

O ponto H Sejam $\mathbf{O} \in \mathbb{E}$ o ponto determinado acima e \mathbf{H} definido por

$$\mathbf{H} = \mathbf{O} \oplus (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}). \quad (3)$$

Mostraremos, na seção 3, que, de fato, \mathbf{H} é o ponto de intersecção das três alturas do triângulo ABC e que \mathbf{O} é o ponto de intersecção das três mediatrizes do triângulo ABC .

A seguir, verificaremos que os pontos \mathbf{O} , \mathbf{G} e \mathbf{H} estão sobre uma reta, denominada *Reta de Euler*.

1.1. Teorema. Os pontos \mathbf{O} , \mathbf{G} e \mathbf{H} são colineares.

Se os pontos \mathbf{O} e \mathbf{G} são iguais, então $\mathbf{O} = \mathbf{G}$ e \mathbf{H} são colineares. Assim, para provar a afirmação, suponha que $\mathbf{O} \neq \mathbf{G}$ ou, equivalentemente, que \overrightarrow{OG} é um vetor não nulo em \mathbb{V} . Observe que:

$$\mathbf{O} = \mathbf{O} \oplus 0 \cdot \overrightarrow{OG}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{O} \oplus \overrightarrow{OG} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \mathbf{O} \oplus 3 \cdot \overrightarrow{OG}. \quad (4)$$

A última igualdade decorre do fato que ao escolhermos $O = \mathbf{O}$ em (2) obtemos $\mathbf{G} = \mathbf{O} \oplus \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$; equivalentemente, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$. Assim, segue-se de (3) que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Um ingrediente básico para verificarmos que o circuncentro \mathbf{O} e o ortocentro \mathbf{H} são o ponto de intersecção das mediatrizes e o ponto de intersecção das alturas do triângulo ABC , respectivamente, é o conceito de *projeção ortogonal sobre uma reta* que introduziremos em seguida.

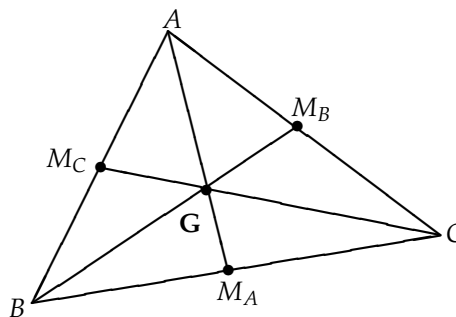


Figura 1: Medianas e baricentro do triângulo ABC .

2 Projeções ortogonais

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em \mathbb{V} . Lembremos que dois vetores u e $v \in \mathbb{V}$ são chamados ortogonais em relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se $\langle u, v \rangle = 0$. Usaremos a notação $u \perp v$ para indicar que u e v são ortogonais.

Projeção ortogonal vetorial. Seja $v \in \mathbb{V}$ um vetor não nulo. Denotemos por $[v]$ o subespaço de \mathbb{V} gerado pelo vetor v (ou equivalentemente, a reta em \mathbb{V} que passa pela origem com vetor diretor v) e por $[v]^\perp$ o subespaço de \mathbb{V} formado pelos vetores ortogonais ao vetor v , ou

seja, $[v]^\perp = \{u \in \mathbb{V} \mid u \perp v\}$. Então verifica-se que $\mathbb{V} = [v] + [v]^\perp$ e $[v] \cap [v]^\perp = \{\vec{0}\}$, ou seja, \mathbb{V} é soma direta dos subespaços $[v]$ e $[v]^\perp$. Consequentemente, dado $u \in \mathbb{V}$ existem únicos $p(u) \in [v]$ e $w \in [v]^\perp$ tais que $u = p(u) + w$.

De fato, essa descrição nos leva a concluir que $p(u) = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$ e nos permite definir a aplicação linear $p: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$ por $u \mapsto p(u)$, que denominaremos de *projeção ortogonal (vetorial)* sobre o subespaço $[v]$ de \mathbb{V} .

Observe que a definição de projeção ortogonal (vetorial) se baseia na noção de soma direta em \mathbb{V} . A seguir com o objetivo de definir uma projeção ortogonal no espaço afim \mathbb{E} , tomaremos em lugar do subespaço $[v]$ de \mathbb{V} uma reta \mathcal{R} em \mathbb{E} , e será a ação “ \oplus ” de \mathbb{V} sobre \mathbb{E} , que nos permitirá representar um ponto X de \mathbb{E} de maneira única na forma $X = \pi(X) \oplus w$ com $\pi(X) \in \mathcal{R}$ e $w \in [v]^\perp$ (imitando a decomposição de vetores num espaço vetorial via soma direta). Naturalmente, $w = \overrightarrow{\pi(X)\hat{X}}$ (de acordo com (*)).

Projeção ortogonal afim. Fixe a reta $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P, v)$ em \mathbb{E} . E seja $\pi: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$ a função que associa a cada $X \in \mathbb{E}$ o único ponto $\pi(X) \in \mathbb{E}$, satisfazendo as seguintes duas condições:

$$(i) \pi(X) \in \mathcal{R} \text{ e } (ii) \overrightarrow{\pi(X)\hat{X}} \perp v; \quad (5)$$

$\pi(X)$ será denominado *projeção ortogonal (afim) de X sobre a reta \mathcal{R}* .

Note que se $\pi(X) \in \mathcal{R}$ então $\pi(X) = P \oplus tv$ para algum $t \in \mathbb{R}$, ou, equivalentemente, $\overrightarrow{P\pi(X)} = tv$. Por outro lado, a condição de ortogonalidade entre $\overrightarrow{\pi(X)\hat{X}}$ e v , nos leva a concluir que existe um único valor real para tal t . De fato,

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \overrightarrow{\pi(X)\hat{X}}, v \rangle \\ &= \langle \overrightarrow{\pi(X)P} + \overrightarrow{P\hat{X}}, v \rangle \\ &= \langle -tv + \overrightarrow{P\hat{X}}, v \rangle \\ &= -t\langle v, v \rangle + \langle \overrightarrow{P\hat{X}}, v \rangle. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\pi(X) = P \oplus \frac{\langle \overrightarrow{P\hat{X}}, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v = P \oplus p(\overrightarrow{P\hat{X}}).$$

A última igualdade é um indicativo e um convite para mostrar como se relacionam a projeção ortogonal afim e a projeção ortogonal vetorial.

Relação entre a projeção ortogonal vetorial e afim

Fixe a reta $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P, v)$. Sejam X um ponto em \mathbb{E} e u um vetor em \mathbb{V} . A seguir determinaremos a projeção ortogonal do ponto $X \oplus u$ sobre a reta \mathcal{R} , isto é, descobriremos o ponto $Y \in \mathcal{R}$ e o vetor $w \in \mathbb{V}$, ortogonal ao vetor v , tal que $X \oplus u = Y \oplus w$. Observe a Figura 2 e descubra a resposta! Ela foi desenhada em função dos seguintes fatos (cujas verificações deixamos ao leitor):

- O ponto $\pi(X) \oplus p(u)$ pertence à reta \mathcal{R} .
- Os vetores $\overrightarrow{\pi(X)\hat{X}}$ e $u - p(u)$ são ortogonais ao vetor v (portanto sua soma também).
- As propriedades (podemos dizer) de associatividade da ação “ \oplus ” e comutatividade da soma de vetores nos permitem concluir que

$$\begin{aligned} &(\pi(X) \oplus p(u)) \oplus [\overrightarrow{\pi(X)\hat{X}} + (u - p(u))] \\ &= \pi(X) \oplus [p(u) + \overrightarrow{\pi(X)\hat{X}} + (u - p(u))] \\ &= \pi(X) \oplus [(\overrightarrow{\pi(X)\hat{X}} + p(u)) + (u - p(u))] \\ &= [\pi(X) \oplus (\overrightarrow{\pi(X)\hat{X}} + p(u))] \oplus (u - p(u)) \\ &= [(\pi(X) \oplus \overrightarrow{\pi(X)\hat{X}}) \oplus p(u)] \oplus (u - p(u)) \\ &= [X \oplus p(u)] \oplus (u - p(u)) = X \oplus u. \end{aligned}$$

Assim o vetor $\overrightarrow{(\pi(X) \oplus p(u))(X \oplus u)}$ é ortogonal ao vetor v . Portanto, da definição da projeção ortogonal afim, segue-se que

$$\pi(X \oplus u) = \pi(X) \oplus p(u). \quad (6)$$

Observe que se escolhermos $u = \overrightarrow{X\hat{Y}}$ (com X, Y em \mathbb{E}) em (6) teremos que:

$$p(\overrightarrow{X\hat{Y}}) = \overrightarrow{\pi(X)\pi(Y)}. \quad (7)$$

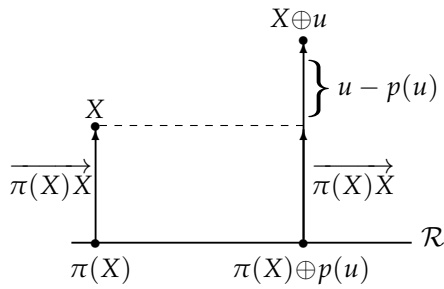


Figura 2: Projeção de $X \oplus u$ sobre a reta \mathcal{R} .

Implicações da igualdade $\pi(X \oplus u) = \pi(X) \oplus p(u)$

A seguir apresentamos algumas implicações da igualdade em (6) que serão usadas mais adiante.

Projeção ortogonal e pontos médios. Seja M_{AB} o ponto médio entre A e B . Então verifica-se que

$$\pi(M_{AB}) \text{ é o ponto médio entre } \pi(A) \text{ e } \pi(B). \quad (8)$$

Observe que $M_{AB} = A \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Então segue-se de (6) e (7) que $\pi(M_{AB}) = \pi(A) \oplus \frac{1}{2}p(\overrightarrow{AB}) = \pi(A) \oplus \frac{1}{2}\pi(A)\pi(B)$. Logo, $\pi(M_{AB})$ é o ponto médio entre $\pi(A)$ e $\pi(B)$.

Projeção ortogonal e mediatrizes. Um fato simples, porém importante, é que dados $P \in \mathcal{R} \subset \mathcal{P}$ existe uma única reta ℓ contida no plano \mathcal{P} , passando por P que é ortogonal à reta \mathcal{R} (ou seja, os vetores diretores de \mathcal{R} e ℓ são ortogonais). Neste contexto pode-se mostrar o seguinte fato.

Fato 1. *Suponha que $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P, v)$ e $\ell = \mathcal{R}(P, u)$, com $u \perp v$, e seja X um ponto do plano $\mathcal{P} = \mathcal{P}(P, u, v)$. Então são equivalentes:*

- (a) $X \in \ell$;
- (b) $\pi(X) = P$;
- (c) $d(X, Q_1) = d(X, Q_2)$, para quaisquer $Q_1, Q_2 \in \mathcal{R}$ tais que P é o ponto médio entre Q_1 e Q_2 .

Demonstração.

(a) \Rightarrow (b) Se $X \in \ell$ então $X = P \oplus tu$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Então segue-se de (6) que $\pi(X) = \pi(P) \oplus tp(u) = P$, pois $\pi(P) = P$ e $p(u) = \vec{0}$ (pois $P \in \mathcal{R}$ e $u \perp v$, respectivamente).

(b) \Rightarrow (c) Seja $X \in \mathcal{P}$ tal que $\pi(X) = P$. Considere $u_1 = \overrightarrow{XP}$ e $u_2 = \overrightarrow{Q_1P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{PQ_2}$, conforme ilustra a Figura 3.

Observe que $\overrightarrow{XQ_1} = u_1 - u_2$, $\overrightarrow{XQ_2} = u_1 + u_2$ e $u_1 \perp u_2$. Assim $d(X, Q_1)^2 = \langle u_1, u_1 \rangle + \langle u_2, u_2 \rangle = d(X, Q_2)^2$. Portanto, $d(X, Q_1) = d(X, Q_2)$.

(c) \Rightarrow (a) Sejam $Q_1, Q_2 \in \mathcal{R}$ tais que P é o ponto médio entre Q_1 e Q_2 e $X \in \mathcal{P}$ tal que $d(X, Q_1) = d(X, Q_2)$. Observe que o vetor $\overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1}$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, já que

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1}, \overrightarrow{Q_1Q_2} \rangle &= \langle \overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1}, \overrightarrow{XQ_2} - \overrightarrow{XQ_1} \rangle \\ &= d(X, Q_2)^2 - d(X, Q_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, como P é o ponto médio entre Q_1 e Q_2 , concluímos de (1) (escolhendo $O = X$) que $\overrightarrow{XP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1})$. Agora como o vetor $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ é um múltiplo do vetor v (lembre que Q_1 e Q_2 são pontos da reta $\mathcal{R} = \mathcal{R}(P, v)$) e tendo em consideração que o vetor $\overrightarrow{XQ_2} + \overrightarrow{XQ_1}$ é ortogonal ao vetor $\overrightarrow{Q_1Q_2}$, concluímos que o vetor \overrightarrow{XP} é ortogonal ao vetor v .

Agora como os vetores \overrightarrow{XP} e u pertencem ao plano $[u, v]$ (e ambos são ortogonais ao vetor v), concluímos que estes vetores são linearmente dependentes, ou seja, $\overrightarrow{XP} = tu$ para algum $t \in \mathbb{R}$, logo $\overrightarrow{PX} = -tu$, de onde concluímos que $X = P \oplus -tu$. Portanto $X \in \ell$. \square

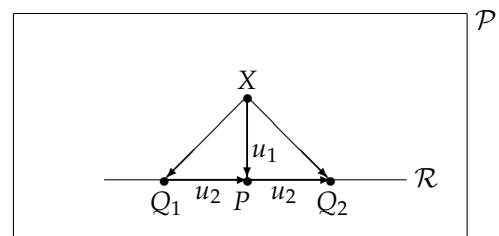


Figura 3: Relação entre reta ortogonal e mediatriz.

Um caso especial do Fato 1 é o seguinte. Sejam M_A , M_B e M_C os pontos médios dos lados BC , AC e AB do triângulo ABC , respectivamente. Denotemos por \mathcal{M}_A a mediatriz relativa ao lado BC (ou seja, a única reta no plano $\mathcal{P}_{A,B,C}$ que passa por M_A e cujo vetor diretor é ortogonal ao vetor \vec{BC}). As mediatrizes \mathcal{M}_B e \mathcal{M}_C são definidas de maneira análoga via permutação de A , B e C (ver Figura 4). Assim, temos que

$$X \in \mathcal{M}_C \iff \pi(X) = M_C \iff d(X, A) = d(X, B). \quad (9)$$

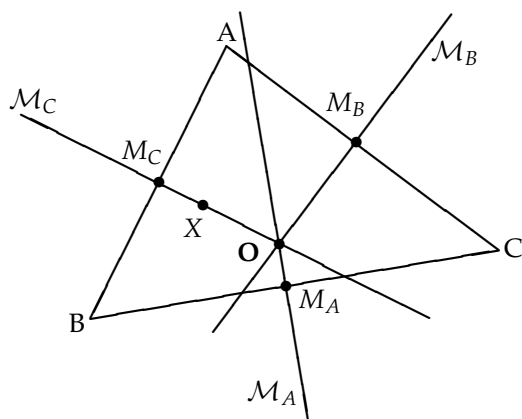


Figura 4: Mediatrizes e circuncentro do triângulo ABC .

3 A geometria dos pontos O e H

Segue-se da própria definição de O que ele é o *circuncentro* do triângulo ABC e, do resultado em (9), que O pertence à intersecção das mediatrizes, conforme ilustra a Figura 4.

A seguir verificaremos que H é o ponto de encontro das alturas do triângulo ABC em \mathbb{E} , de forma que H é, de fato, o *ortocentro* do triângulo ABC .

Seja $H_C = \pi(C)$ a projeção ortogonal de C sobre $\mathcal{R}_{A,B}$ (a reta que passa por A e B). De maneira análoga defina H_A e H_B . Observe que H_A , H_B e H_C são os pés das alturas do triângulo ABC (ver Figura 5).

Observe que $\vec{H_C H} = \vec{H_C C} + \vec{C H}$. Por outro lado, o vetor $\vec{H_C C}$ é ortogonal ao vetor \vec{AB} , pois $\pi(C) = H_C$. A seguir verificaremos que o vetor $\vec{C H}$ também é ortogonal ao vetor \vec{AB} . O ponto chave para fazer isto está na definição de H dada em (3), que nos garante

que $\vec{O H} = \vec{O A} + \vec{O B} + \vec{O C}$. De onde concluímos que $\vec{C H} = \vec{C O} + \vec{O H} = \vec{O A} + \vec{O B}$. Portanto

$$\begin{aligned} \langle \vec{C H}, \vec{A B} \rangle &= \langle \vec{O A} + \vec{O B}, \vec{A O} + \vec{O B} \rangle \\ &= -\langle \vec{O A}, \vec{O A} \rangle + \langle \vec{O B}, \vec{O B} \rangle \\ &= -d^2(O, A) + d^2(O, B) = 0. \end{aligned}$$

Assim o vetor $\vec{H_C H}$ é ortogonal ao vetor $\vec{A B}$, e, desta forma,

$$\pi(H) = H_C. \quad (10)$$

Segue-se do Fato 1 que H pertence à altura relativa ao vértice C e permutando os vértices do triângulo ABC , concluímos que H pertence às outras duas alturas.

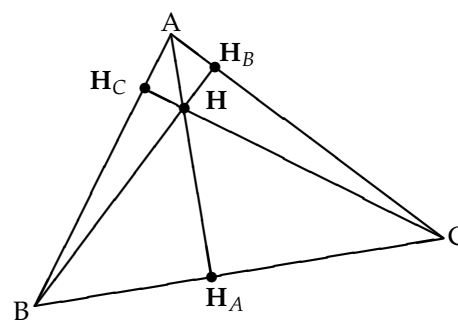


Figura 5: Alturas e ortocentro do triângulo ABC .

4 A circunferência dos 9 pontos

Dados $P_0 \in \mathbb{E}$ e r um número real positivo, denotaremos por $\mathcal{C}(P_0, r)$ a *circunferência* em \mathbb{E} de centro P_0 e raio r , definida por

$$\mathcal{C}(P_0, r) = \{Q \in \mathbb{E} \mid d(Q, P_0) = r\}.$$

Consideremos o triângulo ABC em \mathbb{E} e fixemos as seguintes notações, conforme ilustra a Figura 6.

- ◊ N é o ponto médio entre O e H .
- ◊ E_A (E_B e E_C) é o ponto médio entre H e A (respectivamente, B e C); estes são os pontos de Euler.
- ◊ Seja $r = \frac{1}{2}d(O, A)$. Posto que O é o circuncentro do triângulo ABC temos que r independe do vértice escolhido (i.e. $r = \frac{1}{2}d(O, B) = \frac{1}{2}d(O, C)$).

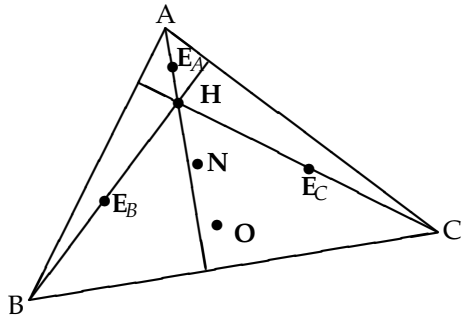


Figura 6: Etapa da construção do círculo de 9 pontos.

Veremos a seguir que a chave para mostrar que os pontos médios e os pontos de Euler do triângulo ABC pertencem à circunferência de centro N e raio r , é a definição universal de ponto médio (em (1)). Já a verificação de que H_C (pé da altura pelo vértice C) pertence a $\mathcal{C}(N, r)$ precisa da noção de projeção ortogonal afim (especificamente do Fato 1 e de (8), (9) e (10)), além da verificação a priori de que M_C (ponto médio do lado AB) pertence a $\mathcal{C}(N, r)$. Outra observação importante é que a prova (logo a seguir) de que os pontos notáveis M_C , E_C e H_C do triângulo ABC pertencem à circunferência $\mathcal{C}(N, r)$ pode ser facilmente modificada pelo leitor de modo a concluir que os outros pontos (médios, de Euler e pés das alturas, respectivamente) também pertencem à circunferência $\mathcal{C}(N, r)$.

Os pontos médios do triângulo ABC pertencem à circunferência de centro N e raio r . Como N é o ponto médio do segmento OH , escolhendo $O = \mathbf{O}$ em (1), podemos escrever N na forma $N = \mathbf{O} \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$. Tendo em consideração que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (veja (3)) temos que

$$\begin{aligned} N &= \mathbf{O} \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \left[\mathbf{O} \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \right] \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \quad (11) \\ &= M_C \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}. \end{aligned}$$

A última igualdade resulta da caracterização do ponto médio, M_C , entre os pontos A e B dada em (1). Assim,

de (11), concluímos que

$$\overrightarrow{M_C N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

e que, portanto,

$$d(N, M_C) = \frac{1}{2}d(O, C) = r. \quad (12)$$

Os pontos E_A , E_B e E_C pertencem à circunferência de centro N e raio r . Como N é o ponto médio do segmento OH , escolhendo $O = C$ em (1), podemos escrever N na forma $N = C \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{CH})$. Assim,

$$\begin{aligned} N &= C \oplus \frac{1}{2}(\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{CO}) \\ &= \left(C \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{CH} \right) \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{CO} \quad (13) \\ &= E_C \oplus \frac{1}{2}\overrightarrow{CO}. \end{aligned}$$

A última igualdade decorre da definição do ponto médio E_C dada em (1). Assim, de (13), concluímos que

$$d(N, E_C) = r. \quad (14)$$

Observação. Como $\overrightarrow{M_C N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{E_C N} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CO}$, os pontos M_C , N e E_C estão sobre uma reta, que é, em particular, um diâmetro da circunferência de centro N e raio r .

Os pés das alturas H_A , H_B e H_C pertencem à circunferência de centro N e raio r . Seja π a projeção ortogonal sobre a reta $\mathcal{R}_{A,B}$. De (9) e (10) tem-se que $\pi(\mathbf{O}) = M_C$ e $\pi(\mathbf{H}) = H_C$, respectivamente. Por outro lado, como N é o ponto médio entre \mathbf{O} e \mathbf{H} , segue de (8) que $\pi(N)$ é o ponto médio entre M_C e H_C (ver Figura 7).

Agora, aplicando o Fato 1 aos pontos $P = \pi(N)$, $Q_1 = H_C$ e $Q_2 = M_C$, concluímos que $d(N, M_C) = d(N, H_C)$. Por outro lado, de (11) havíamos deduzido que $d(N, M_C) = r$. Portanto $d(N, H_C) = r$.

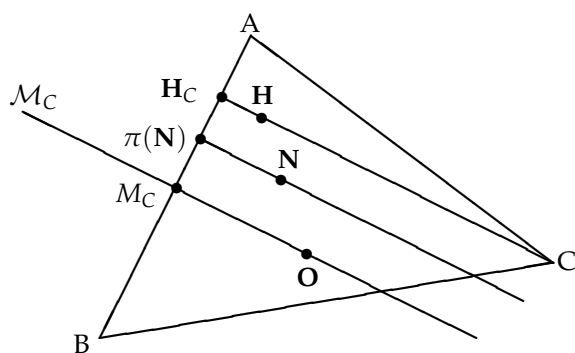


Figura 7: N está à mesma distância dos pontos médios e dos pés das alturas.

Assim, provamos

(C) A circunferência de 9 pontos. Dado um triângulo ABC em \mathbb{E} , os pontos médios de seus lados (M_A , M_B e M_C), os pés das alturas (H_A , H_B e H_C) e os pontos de Euler (E_A , E_B e E_C) estão sobre a circunferência de centro N e raio r (ver Figura 8).

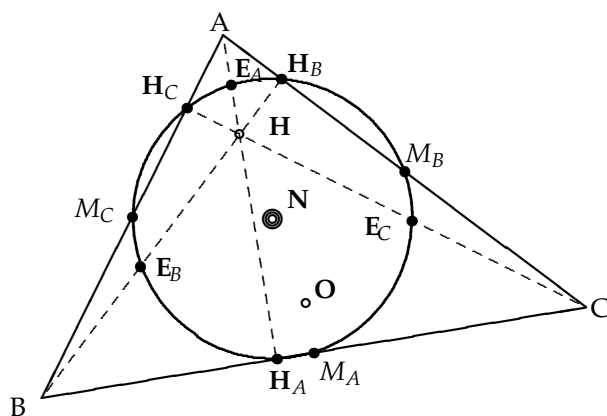


Figura 8: Circunferência de nove pontos: pontos médios, pés das alturas e pontos de Euler.

Agradecimentos. Agradecemos aos editores da *Matemática Universitária* e ao professor Marivaldo Pereira Matos (DM-UFPB), pela leitura do texto original. Durante a elaboração do texto o primeiro autor (Jacqueline Rojas) teve o apoio parcial do CNPq, processo número 620108/2008-8 (Edital Casadinho).

Referências

- [1] CARNEIRO, J. Reta de Euler e números complexos. *Eureka*, n. 20, p. 31–36, 2004.
- [2] GARCIA, A.; LEQUAIN, Y. *Elementos de álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. (Projeto Euclides)
- [3] GONÇALVES, A. *Introdução à álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003. (Projeto Euclides)
- [4] LIMA, E. L. *Álgebra linear*. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. (Coleção Matemática Universitária)
- [5] DE VILLIERS, M. A generalization of the nine-point circle and Euler line. *Pythagoras – Association for Mathematics Education of South Africa (AMESA)*, p. 31–35, 2005.

Jacqueline Rojas

jacq@mat.ufpb.br

CCEN - Departamento de Matemática - UFPB

Ramón Mendoza

ramon@dmate.ufpe.br

CCEN - Departamento de Matemática - UFPE