Foi realizada em outubro de 2010 pelo IMPA, com o apoio do IME/USP, a II Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática. A prova foi realizada em dois dias e os estudantes tinham 4 horas e meia de prova em cada dia. Seguem abaixo os problemas propostos.

1. Dados dois vetores $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$ em $\mathbb{R}^n$, definimos a matriz $v * w$ cujo elemento na linha i e coluna j é $v_i w_j$. Suponha que v e w são linearmente independentes. Determine o posto da matriz $v * w - w * v$.
Observação. O posto de uma matriz é o número máximo de colunas linearmente independentes.

2. Num lado de um corredor existem $2N$ quartos igualmente espaçados numerados sucessivamente de 1 até $2N$. Em cada quarto i entre 1 e N existem p_i camas. Deseja-se transportar todas estas camas aos quartos de $N+1$ a $2N$, de modo que ao final, para cada j entre $N+1$ e $2N$ haja p_j camas no quarto j. Suponha que cada cama pode ser transportada uma única vez e que o custo para transportar uma cama entre o quarto i e o quarto j é $(i-j)^2$. Determine uma maneira de mover cada cama de tal forma que se minimize o custo total.
Observação. Os números p_i são dados e satisfazem $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = p_{N+1} + p_{N+2} + \cdots + p_{2N}$.

3. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *dimensão zero* se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existem um inteiro positivo k e intervalos limitados $I_1, I_2, \ldots, I_k$ tais que $X \subset I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_k$ e $\sum_{j=1}^{k} |I_j|^{\varepsilon} < \varepsilon$. Mostre que existem conjuntos $X, Y \subset [0,1]$, ambos de dimensão zero, tais que $X + Y = [0,2]$, onde $X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$.
Observação. $|I|$ denota o comprimento do intervalo I.

4. Seja $f : [0,1] \to [0,1]$ uma função crescente, contínua em $[0,1]$, diferenciável em $(0,1)$ e com derivada menor que 1 em cada ponto. Definimos a sequência de conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots$ da seguinte maneira: $A_1 = f([0,1])$, e para $n \geq 2$, $A_n = f(A_{n-1})$. Demonstre que $\lim\limits_{n \to +\infty} d(A_n) = 0$, onde $d(A)$ é o diâmetro do conjunto A.
Observação. O diâmetro de um conjunto X se define como $d(X) = \sup\limits_{x,y \in X} |x - y|$ ou, em outras palavras, como o comprimento do intervalo $[a,b]$ que contém X para o qual $b - a$ é mínimo.

5. Sejam n e d inteiros maiores que 1 com $\mathrm{mdc}(n, d!) = 1$. Prove que n e $n + d$ são primos se e somente se

$$d!d((n-1)!+1) + n(d!-1) \equiv 0 \pmod{n(n+d)}.$$

6. Dizemos que um grupo é localmente cíclico se cada um de seus subgrupos finitamente gerados é cíclico. Prove que um grupo localmente cíclico é isomorfo a um de seus subgrupos próprios se e somente se é isomorfo a um subgrupo próprio do grupo dos números racionais com a operação de soma.
Observações. (i) Um grupo é finitamente gerado se contém um subconjunto finito de elementos tal que com estes e seus inversos é possível obter qualquer outro elemento do grupo usando a operação do grupo um número finito de vezes. (ii) Um grupo é cíclico se é gerado por um único elemento. (iii) Um subgrupo próprio é um subgrupo estritamente contido no grupo.

Problema proposto por Marcos Martinelli:

7. Seja $(F_n(x))_{n \geq 0}$ a sequência de polinômios dada por $F_0(x) = 0, F_1(x) = 1$ e $F_{n+1}(x) = x \cdot F_n(x) + F_{n-1}(x), \forall n \geq 1$. Prove que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)F_{2n+1}(2x)} = \frac{\pi}{4n+2}.$$