Artigo

George Green, o Homem e o Teorema

Heloisa B. Medeiros, Lucia M. Menezes e Denise Oliveira Pinto

UFF

1 O Homem

George Green é um nome bastante familiar para os matemáticos de hoje, e seus resultados (especialmente o famoso "Teorema de Green" e as "funções de Green") são amplamente conhecidos. Todavia, não é muito claro, mesmo para os seus biógrafos mais dedicados, em que fontes ou conhecimentos poderia ter se baseado para desenvolver seus trabalhos; as evidências sugerem a obra de um gênio autodidata muito mais do que o esforço e a interlocução de um grupo de cientistas. Ele próprio, no prefácio de seu primeiro (e mais importante) trabalho, *An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*, relata peculiaridades que, provavelmente, constituem os aspectos mais marcantes de sua biografia: a ausência de intimidade com o meio acadêmico, a escassa oportunidade de um estudo mais formal e a pouca disponibilidade de tempo para o aprofundamento de suas ideias:

> *Should the present Essay tend in any way to facilitate the application of analysis to one of the more interesting of the physical sciences, the author will deem himself amply repaid for any labour he may have bestowed upon it; and it is hoped the difficulty of the subject will incline mathematicians to read the work with indulgence, more particularly when they are informed that it was written by a young man, who has been obliged to obtain the little knowledge he possesses, at such intervals and by such means, as other indispensable avocations which offer few opportunities of mental improvement, afforded.*[1] [7, 8]

A vida lhe concederia, posteriormente, alguma chance de convivência com estudiosos da época; mas não lhe daria o prêmio do reconhecimento compatível com seu mérito, como deixa claro o obituário do *Nottingham Review*, em 11 de Junho de 1841:

> *In our obituary of last week the death of Mr. Green, a mathematician, was announced; we believe he was a son of a miller, residing near to Nottingham, but having a taste for study, he applied his gifted mind to the science of mathematics, in which he made a rapid progress....Had his life been prolonged, he might have stood eminently high as a mathematician.*[2]

George Green nasceu em 1793 em Nottingham, na Inglaterra vitoriana, e foi o primeiro filho de um padeiro próspero, também chamado George. Naquele tempo, final do século XVIII, a indústria do algodão declinava e uma massa de trabalhadores rurais, faminta e desempregada, começava a ocupar as cidades. Em 1800, Nottingham estava superpovoada de pessoas miseráveis, a colheita fora ruim, o milho estava caro e a Inglaterra se encontrava em guerra com a França. Neste cenário, o

[1] Se este estudo, de algum modo, facilitar o uso da análise *[matemática]* em algum dos problemas mais interessantes das ciências da natureza o autor se sentirá amplamente recompensado pelo esforço a ele dedicado; espera-se que a dificuldade do tema leve os matemáticos a ler o trabalho com benevolência, particularmente quando informados que foi escrito por um jovem, obrigado a obter o pouco conhecimento que possui em condições, de tempo e recursos, limitadas por outras atribuições indispensáveis que possibilitam poucas oportunidades de desenvolvimento intelectual.

[2] No obituário da semana passada, a morte de Mr. Green, um matemático, foi divulgada; supõe-se que era o filho de um moleiro que residia perto de Nottingham, mas com gosto especial pelo estudo, ele direcionou sua inteligência notável para a matemática, onde fez rápidos progressos... Houvera sua vida sido mais longa, talvez tivesse se elevado a um nível mais alto como matemático.

preço do pão (alimento básico) se elevara e muitos acreditavam que os padeiros contribuíam para esse estado de coisas estocando matéria prima. A inquietação deu lugar à revolta que ficou conhecida como "Corn Riot" e, localmente, como "Bread Riot". As padarias, dentre elas a de George Green, sofriam ataques e destruição. Foi neste cenário que George pai enviou seu filho à mais cara e renomada escola de Nottingham: a Goodacre Academy. Green iniciou (e também concluiu) lá aquilo que viria a ser seu único contato conhecido com algum ambiente acadêmico durante mais de trinta anos.

Seguindo o costume da época, após dois anos ele deixou a escola para ajudar seu pai na padaria que começava a prosperar. Um prospecto de 1808 nos dá uma ideia dos temas tratados durante esses dois anos. Segundo o anúncio, na Standard Hills Academy (escola formada como uma evolução da Goodacre Academy) os estudantes poderiam adquirir profundos conhecimentos de leitura, gramática inglesa, caligrafia e aritmética. Certamente havia bastante matemática, uma vez que o responsável pela escola (Goodacre) se dedicava ao tema; um primo de George Green, também seu cunhado, nos conta em uma carta que os conhecimentos do aluno em matemática rapidamente suplantaram os do mestre.

Em 1807, a família Green havia prosperado bastante e era proprietária de vários imóveis em Nottingham. George pai comprou em um leilão uma propriedade rural em Sneinton, a poucas milhas de Nottingham, e lá construiu um moinho de milho. Tudo leva a crer que muito cedo a maior parte dos cuidados com o moinho foi delegada a George filho e a um administrador: William Smith, cuja filha viria a ser a mãe dos sete filhos de George Green, embora ele jamais tenha se casado (tampouco chegou a admitir esta união em alguma convivência social). Os cuidados com o moinho ocuparam boa parte de seu tempo até a morte de seus pais e foram bem sucedidos a ponto de garantir à família um sólido patrimônio. Todavia, não era um dever prazeroso e, segundo palavras de seu primo-cunhado, Green os considerava *irksome* (penosos). Mas foi só em 1829 (ano da morte de seu pai) que George Green parece ter se sentido à vontade para delegar estes afazeres ao seu administrador que, para os padrões de hoje no Brasil, seria seu sogro.

Decorridos muitos anos de sua saída da Goodacre Academy, Green procurou contato com o meio científico cultural, associando-se, em 1823, à Nottingham Subscription Library, com sede na Bromley House. Embora a casa fosse frequentada por diversos cavalheiros de destaque da sociedade local, tudo indica que seu interesse se voltou para o acervo bibliográfico, composto principalmente por volumes de literatura, história, biografias e história natural. Eram escassas, embora relevantes, as obras direcionadas à matemática.

Em 1828, portanto cinco anos após sua filiação à biblioteca, Green publicava seu primeiro e mais importante trabalho. A publicação foi financiada por ele mesmo e mais vinte e uma pessoas; cada uma pagou por sua cópia o valor de sete *shillings* e seis *pences*, quantia equivalente ao ganho semanal de um trabalhador pouco qualificado na ocasião. Supõe-se que a contribuição destes senhores tenha ocorrido mais por amizade ou lealdade pois, à exceção de apenas um (*sir* Edward Bromhead), nenhum deles parecia ter conhecimento suficiente para aproveitá-la. O trabalho foi dedicado *to his Grace the Duke of Newcastle, K. G* e continha resultados extremamente importantes, entre os quais aquele que hoje conhecemos como Teorema de Green. Curiosamente, fazia uso de uma notação pouco frequente e quase desconhecida na Inglaterra: a notação de Leibniz. Até aquele momento, matemáticos ingleses utilizavam a notação de Newton e tinham mesmo dificuldade para entender os resultados dos matemáticos da Europa continental, notadamente os franceses, que começavam a usar os símbolos de Leibniz em seus trabalhos. Os biógrafos de Green conjecturam que seu contato com a matemática francesa e sua nomenclatura pode ter ocorrido através de John Toplis, um reverendo que atuou em uma escola de Nottingham. Sabe-se que Toplis frequentou a Bromley House durante certo tempo e era um entusiasta da matemática francesa contemporânea. Seu interesse o levou, inclusive, a traduzir para o inglês *La Mécanique Céleste* do nobre Marquês de La Place (conhecido por nós como Laplace), acrescentando notas explicativas para os estudantes de então. A tradução foi disponibilizada em Nottingham em 1814. Por razões que envolvem mais a exclusão de outras possibilidades do que documentos históricos, acredita-se que John Toplis tenha ajudado Green a entender a matemática francesa daquele tempo e tenha facilitado a leitura de obras de matemáticos como Lacroix, Poisson e Biot.

A repercussão do ensaio foi quase nenhuma o que, até certo ponto, poderia ser esperado, já que sua publicação ficou restrita a um ambiente pouco afeito à questão, em uma cidade pequena, e só foi divulgada, essencialmente, a quem não conseguiria entendê-la. Entretanto, *sir* Edward Bromhead, um influente *gentleman* das imediações de Lincoln, mostrou entusiasmo e escreveu a Green oferecendo-se para divulgar seu trabalho nas sociedades científicas da época. *Sir* Edward havia estudado em Cambridge, onde teve oportunidade de conviver com vários entusiastas da matemática francesa, e é provável que esse contato tenha sido decisivo para que fosse capaz de avaliar a importância dos resultados do ensaio. Green se manteve calado sobre a oferta de *sir* Edward na ocasião. Segundo confessaria em uma longa carta mais tarde, alguém em cuja opinião confiava desde muito cedo o havia persuadido de que o entusiasmo de *sir* Edward era apenas uma manifestação de delicadeza e que sua oferta de divulgação deveria ser ignorada. Não se sabe quem foi esta pessoa mas alguns indícios apontam para seu primeiro mestre: Robert Goodacre.

De qualquer modo, quando dois anos após a publicação do ensaio o contato entre Green e *sir* Edward ocorreu, este mostrou-se disposto a honrar sua oferta e surgiu daí um relacionamento bastante profícuo. Nos três anos seguintes Green produziu mais três *memoirs*: *Mathematical Investigations Concerning the Laws of the Equilibrium Fluids Analogous to the Electric Fluid* (naquele tempo a eletricidade era entendida como resultado do fluxo de um fluido invisível); *On the Determination of the Exterior and Interior Attractions of Ellipsoids of Variable Densities* e *Researches on the Vibrations of Pendulums in Fluid Media*. Os dois primeiros foram enviados por *sir* Edward para publicação no Transactions of the Cambridge Philosophical Society; o terceiro, *sir* Edward enviou para a Royal Society of Edinburgh, onde mantinha boas relações, e foi publicado em 1836. Foi, assim, pelas mãos desse cavalheiro, que os resultados de Green alcançaram os meios usuais de divulgação da comunidade científica e, também, foi através dele que vários contatos importantes se estabeleceram. Todavia, o trabalho no moinho ainda ocupava Green, principalmente após a morte de seu pai, quando ficou responsável pelos negócios da família, e ele parecia se sentir pouco preparado para o convívio com os homens da ciência. Em uma carta dirigida a *sir* Edward, pouco após a morte de seu pai, ele promete esforços no sentido de concluir seus trabalhos *although the time necessary of doing so were stolen from my sleep* [3] .Quando convidado por *sir* Edward a comparecer a um encontro com seus colegas de Cambridge em junho de 1833, ele recusa gentilmente e escreve: *Being as yet only a beginner I think I have no right to go there and must defer that pleasure until I shall have become tolerably respectable as a man of science should that day ever arrive* [4].

Reside nesta passagem, por um lado, a pouca noção que os cientistas da época e ele mesmo, tinham da importância do seu trabalho; mas também se explicita a esperança de um contato mais regular e oficial com os meios acadêmicos. E neste sentido uma carta apela mais uma vez a seu amigo, em abril de 1833: ... *You are aware that I have an inclination for Cambridge if there was a fair prospect of success. Unfortunately I possess little Latin, less Greek, have seen too many winters and am thus held in a state of suspense by counteractive motives* [5].

Com efeito, em outubro de 1833, George Green iniciou sua graduação em Cambridge entrando para o Caius College, o mesmo ao qual pertencera *sir* Edward Bromhead. Nesta ocasião Green tinha quarenta anos de idade e quatro filhos com Jane Tollins (filha do gerente do moinho), mas sua união não se oficializara e nada indica que ele tivesse vivido com Jane e seus filhos como uma família. É mesmo provável que seu silêncio a respeito desta ligação se devesse, naquele momento, à sua aspiração de obter uma posição como *college fellowship*, o que o impedia de ser casado.

---

[3] embora o tempo necessário para fazê-lo seja retirado das minhas horas de sono

[4] Sendo ainda apenas um iniciante, penso que não tenho direito de ir lá e devo postergar este prazer até que venha a me tornar minimamente respeitável como homem da ciência, se é que tal dia chegará

[5] É do seu conhecimento que eu tenho preferência por Cambridge, se houver alguma chance. Infelizmente tenho poucos conhecimentos de latim, menos ainda de grego, vi muitos invernos e me encontro, portanto, bastante ansioso devido a tais adversidades.

Embora a real importância de seu trabalho só tenha sido reconhecida após sua morte, Cambridge lhe concedeu um ambiente acadêmico e social que ele parece ter apreciado e, finalmente, em outubro de 1839, lhe concedeu também a tão almejada posição como *fellow*. Sua produção, durante a estada em Cambridge, compõe-se fundamentalmente de seis trabalhos; dois em hidrodinâmica, dois sobre reflexão e refração de som e dois sobre reflexão e refração de luz. Apenas seis meses depois da concessão de sua *fellowship* de Cambridge, Green voltou a Nottingham e, no dizer de seu cunhado, já mostrando uma saúde frágil. Ele não mais sairia de Nottingham, vindo a falecer de gripe em junho de 1841.

O reconhecimento de sua contribuição surgiria alguns anos depois pela ação de um escocês, William Thomson, mais conhecido como Lord Kelvin. Interessado em eletricidade e magnetismo, Lord Kelvin quase por acaso encontrou uma referência em um trabalho que mencionava *the ingenious Essay by Mr. Green of Nottingham*. O *Essay* havia sido publicado dezessete anos antes, com fundos privados, em Nottingham, de modo que as buscas de Lord Kelvin nas fontes usuais de Cambridge foram mal sucedidas. Entretanto, na véspera de uma viagem para Paris, onde pretendia encontrar com colegas matemáticos, tomou conhecimento de que seu orientador (William Hopkins) dispunha de três cópias que, supõe-se, lhe teriam sido dadas pelo próprio Green. Ele levou duas cópias a Paris e, tendo percebido a importância do resultado, entregou uma delas a um editor de um periódico muito lido na Europa Continental. Este lhe prometeu publicar o trabalho e o fez em três partes, entre 1850 e 1854, em inglês e, mais tarde em alemão; mas foi só em 1871 que esse primeiro trabalho de George Green foi publicado na Inglaterra; cópia desta edição pode ser consultada em PDF em [7] e uma reimpressão está disponível como livro [8]. Durante toda sua vida, Lord Kevin se empenhou na divulgação dos trabalhos de Green e, considerando que dentre seus amigos encontravam-se Stokes e Maxwell, seu empenho parece ter rendido bons frutos.

Quando da publicação do *Essay* em alemão, o editor procurou conhecer um pouco da vida do homem por trás da obra. Evidentemente, havia muito pouco documentado, mas teve início um esforço para reconstruir sua história. Contemporâneos e familiares deram informações e, já na segunda metade do século vinte, alguns estudiosos se dedicaram à pesquisa de sua biografia. D. M. Cannell, em especial, se mostrou incansável neste sentido e é com base em seu livro publicado em 1988 e alguns outros textos que aqui fazemos este breve relato [2, 13, 8].

D. M. Cannell é, reconhecidamente, uma estudiosa da biografia de Green. Em [14], [1], [16] e em todas as fontes que consultamos, seu nome está sempre presente. Seu trabalho inclui livros em diferentes edições [2, 3, 4] e artigos cujas referências podem ser encontradas nas fontes já mencionadas. Algumas resenhas de seus livros estão disponíveis em [6] e [15]. Em [2], que tomamos como base, encontramos a *fac simile* de vários documentos originais, tais como partes dos trabalhos de Green, cartas e fotos. No prefácio da edição de que dispomos, a autora dedica quatro parágrafos à citação de suas fontes, que incluem arquivos das cidades de Nottingham e Cambridge, da biblioteca da Bromley House, de bibliotecas de diversas universidades, documentos e correspondências mantidos por pesquisadores, contatos com estudiosos e arquivistas locais, e outros; parte substancial dos capítulos finais é dedicada ao relato minucioso de como se deu sua pesquisa. Em [1] pode-se achar indicações de como entrar em contato com instituições em cujo acervo se encontra material original relacionado aos trabalhos e à vida de George Green, a saber: Universidade de Nottingham, Nottingham County Library e Nottinghamshire Archives. Há também, disponível para venda, uma reimpressão da edição de 1871 dos trabalhos de Green [8]; parte desta obra é acessível em formato PDF em [7].

O século XX traria novas perguntas para as quais as respostas dependiam fortemente das tão famosas funções de Green, o que só veio a reafirmar a genialidade de sua obra.

2 O Teorema

Na ocasião em que Green publicou seu *Essay*, o resultado que hoje conhecemos como Teorema de Green foi escrito com uma notação quase incompreensível para os matemáticos atuais.

Uma formulação moderna do Teorema (bem como sua demonstração) pode ser vista em qualquer livro de cálculo ou análise de várias variáveis, como por exemplo [9].

O teorema se refere a uma região fechada e limitada do plano. Em linhas gerais, afirma a igualdade entre a integral de linha de um campo vetorial na fronteira desta região e a integral dupla (no interior da região) de determinada expressão envolvendo derivadas parciais do campo. No enunciado que usamos aqui (bem conhecido dos cursos de cálculo) aparece o conceito de região simples. Lembramos que uma região de $\mathbb{R}^2$ é dita *simples* se a interseção de sua fronteira com qualquer reta paralela a um dos eixos coordenados ocorre no máximo duas vezes. Em todo caso, o Teorema se refere à união finita de regiões simples, o que é bem pouco restritivo.

Teorema 1. *Seja D uma região limitada no plano formada pela união finita de regiões simples cujos bordos são curvas seccionalmente suaves (isto é, de classe C^1 por partes). Seja σ uma parametrização orientada positivamente de ∂D, (bordo de D) e $G : D \cup \partial D \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1. Então*

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_\sigma G(x,y) \cdot d\mathbf{r} \,, \qquad (2.1)$$

onde $G(x,y) = (G_1(x,y), G_2(x,y))$.

A demonstração do Teorema é bastante técnica e transcende o escopo deste trabalho. Todavia — já foi comentado — pode ser encontrada com facilidade em livros de cálculo ou análise. Nossa intenção é ilustrar o uso do Teorema em alguma aplicação.

Embora originalmente proposto no contexto da teoria de eletromagnetismo, o Teorema de Green pode ser empregado em inúmeras outras situações. Escolhemos uma delas, que nos pareceu interessante: a mensuração de áreas através de um instrumento conhecido como *planímetro polar*, muito usado por cartógrafos e outros profissionais.

A necessidade de medir áreas planas é um problema que se apresenta de maneira natural e inúmeras soluções têm sido propostas desde a Antiguidade. Em 1854, Amsler construiu o planímetro polar, instrumento muito bem recebido por engenheiros e cartógrafos, para calcular a área de uma região limitada por uma curva fechada. A Figura 1 (gentilmente cedida por [5]) mostra uma foto do instrumento, enquanto na Figura 2 temos sua representação esquemática.

Um planímetro é composto essencialmente por dois braços unidos por uma articulação. O primeiro (conhecido como braço fixo) tem uma de suas extremidades presa ao papel (como a ponta seca de um compasso) enquanto a outra se move para permitir o deslocamento do segundo braço (conhecido como braço móvel). Preso ao braço móvel e perpendicular a ele existe um disco que encosta no papel e pode girar livremente. Pela posição desse disco, ele é arrastado em movimentos paralelos ao braço móvel e rola sem escorregar em movimentos perpendiculares ao braço. A consequência disso, havendo condições razoáveis de atrito, é que esse disco captura apenas a componente perpendicular ao braço do movimento descrito por seu centro.

A posição exata do disco neste braço varia, dependendo do planímetro específico que se esteja usando.

Figura 1: Foto de um planímetro de Amsler.

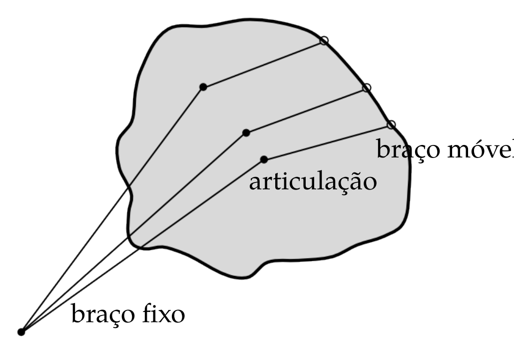

Figura 2: Esquema de um planímetro de Amsler.

Vamos supor aqui que o disco se localiza exatamente na extremidade livre do braço móvel. De fato, essa situação não é prática, porque essa ponta deve estar desimpedida para o usuário do planímetro seguir a curva, mas facilita nossa exposição. Comentaremos no final por que não é difícil obter resultados semelhantes em outras posições.

Para medir uma área deve-se fixar a ponta do primeiro braço no papel e fazer o disco no segundo braço percorrer a fronteira da região, saindo de um ponto e caminhando sempre em uma mesma direção, até retornar ao ponto inicial. Alguns sítios da *web*, como [11]e [12], apresentam simuladores do processo. Ao final do percurso um contador informa o número (não necessariamente inteiro) de voltas que o disco efetuou e, a partir deste número, é possível calcular a área da região. É importante que o percurso da fronteira seja sempre seguido na mesma direção e vamos admitir que é feito na direção positiva (mantendo a região à esquerda).

Em um primeiro momento, a relação entre o número de voltas do disco e a área a ser calculada não é evidente e não se sabe ao certo que raciocínio teria levado Amsler a conceber seu planímetro. Fato é que sua publicação a respeito do assunto — *Über das Planimeter* — não menciona os resultados de Green (embora Amsler e Green tenham sido contemporâneos) e segue uma linha de raciocínio mais própria da geometria plana [5]. De qualquer forma, nossa intenção aqui é entender o funcionamento deste instrumento de medição a partir do Teorema de Green e é nessa direção que vamos argumentar.

Na Figura 3 um esquema é colocado no plano cartesiano. A origem representa o ponto em que está fixado o primeiro braço, (a,b) é o ponto de articulação entre os dois braços e (x,y) é um ponto da fronteira da região. Vale observar que (a,b) depende de (x,y).

Para desenvolver nosso raciocínio, supomos que o ponto fixo está fora da região (isto é, a origem não pertence à região cuja área se quer medir). Pelas convenções e nomenclatura que aqui utilizamos $||(a,b)|| = R$, ou seja: a distância entre um valor possível de (a,b) e a origem é exatamente igual ao tamanho do braço fixo (ver Figura 4). Além disso, para cada (a,b) o braço móvel pode percorrer um círculo de raio r, que é o seu comprimento, em torno de (a,b). Tomando a envoltória destes círculos como fronteira, definimos um anel, em torno da origem, como: $A = \{(x,y),\ R-r \leq ||(x,y)|| \leq R+r\}$ e verificamos que para que um ponto seja alcançado pela extremidade do braço móvel, ele deve pertencer à região A. Todavia, se admitirmos que algum ponto da fronteira de D pertence ao bordo no anel, isto é $(x,y) \in \partial D$ e $||(x,y)|| = R-r$ ou $||(x,y)|| = R+r$, estaremos admitindo a possibilidade de que durante o percurso da fronteira os dois braços se alinhem. Essa possibilidade deve ser evitada. Na verdade, para cada $(x,y) \in \partial D$ existem duas posições possíveis para (a,b). Passar continuamente de uma a outra, implicaria em alinhar os dois braços ao longo do processo. Uma consequência negativa desta possibilidade seria permitir que saíssemos de um ponto com uma das determinações de (a,b), percorrêssemos a fronteira continuamente e retornássemos ao mesmo ponto com outra determinação. Como (a,b) deve ser função de (x,y), evitamos esta dupla possibilidade exigindo que D esteja contido no interior de A. Isto é: admitindo que D é um conjunto fechado (contém seu fecho) queremos que : $(x,y) \in D \Leftrightarrow R-r < ||(x,y)|| < R+r$.

Se o braço móvel se desloca ao longo da sua própria direção o disco não gira, apenas translada. Como queremos entender o significado do número de rotações, estamos interessados em analisar o movimento que ocorre na direção perpendicular ao braço móvel, pois é este o deslocamento que provoca a rotação. O número de rotações é, evidentemente, proporcional à distância percorrido pelo disco no sentido perpendicular ao braço móvel.

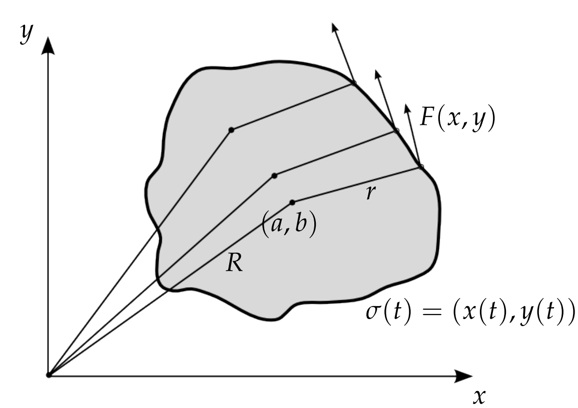

Figura 3: Esquema no plano do planímetro de Amsler.

Chamamos de D a região e de ∂D a sua fronteira que parametrizamos com orientação positiva por uma função $\sigma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$. Como σ descreve posição, $\sigma'(t)$ descreve a velocidade do disco. Para determinar a componente da velocidade perpendicular ao braço móvel verificamos que este braço tem a direção de $(x-a, y-b)$ e sua direção perpendicular (no sentido anti-horário) é $G(x,y) = (-y+b, x-a)$. Portanto, se r é o comprimento do braço móvel, concluímos que

$$F(x,y) = \frac{1}{r}(-y+b, x-a)$$

é um vetor unitário na direção perpendicular ao braço móvel, se a extremidade livre desse braço está em (x,y). A componente da velocidade na direção ortogonal ao braço móvel será, portanto: $v(t) = F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$, onde $\cdot$ denota o produto escalar. A velocidade angular ω do disco é, então, obtida pela expressão

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{\rho},$$

onde ρ é o raio do disco.

Integrando a velocidade angular, obtemos

$$\Omega = \int_\alpha^\beta \omega(t)dt.$$

Sendo Ω a integral da velocidade dividida por ρ, ela mede a distância percorrida pelo disco no movimento de rotação (dividida por ρ) e portanto $\Omega = 2\pi n_0$ onde n_0 é o número de voltas (observe que n_0 não é, necessariamente, um número inteiro). Concluímos, pois, que

$$\begin{aligned} \Omega = \int_\alpha^\beta \omega(t)\,dt &= \frac{1}{\rho}\int_\alpha^\beta F(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{\rho r}\int_\alpha^\beta G(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)\,dt \\ &= 2\pi n_0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

A última integral de (2.2) é a integral de linha de G ao longo de σ e sabemos, pelo Teorema de Green, que

$$\oint_\sigma G\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy. \tag{2.3}$$

Resta-nos apenas calcular essa integral dupla.

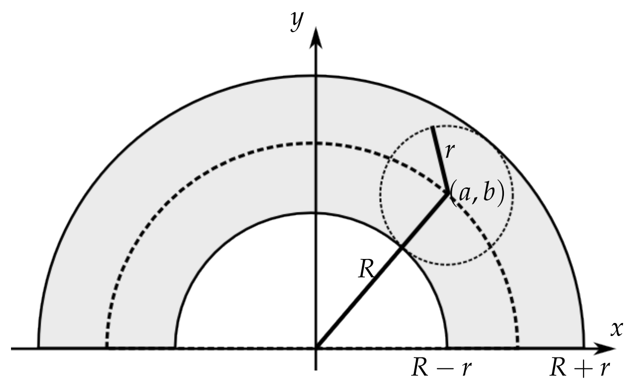

Figura 4: A região de integração deve estar contida no anel limitado pelos círculos de raios $R-r$ e $R+r$.

Da expressão de G calculamos

$$\left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) = 2 - (a_x + b_y) = 2 - \operatorname{Div}(a,b).$$

Para obter $\operatorname{Div}(a,b)$ observamos a Figura 4 para escrever as equações

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = R^2 \\ (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \end{cases}, \tag{2.4}$$

Nas equações acima podemos confirmar aquilo que a intuição nos diz sobre a posição do ponto de articulação (a,b) para cada (x,y) fixo; qual seja: poderiam existir dois valores de (a,b) para cada ponto na curva. Todavia, considerando as hipóteses explicitadas anteriormente, apenas um ponto é possível e prosseguimos, sem culpa, assumindo que (a,b) é função de (x,y).

Derivando (2.4) em x, temos que

$$\begin{cases} 2\,a\,a_x + 2\,b\,b_x = 0 \\ 2\,(x-a)\,(1-a_x) + 2\,(y-b)\,(-b_x) = 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{cases} b_x = -\frac{a\,a_x}{b} \\ (x-a)\,(1-a_x) + (y-b)\,(-b_x) = 0 \end{cases}.$$

Logo, $(x-a)(1-a_x) + (y-b)\,\frac{a\,a_x}{b} = 0$ e, portanto,

$$a_x\left[-(x-a) + \frac{a\,(y-b)}{b}\right] + (x-a) = 0,$$

isto é,

$$a_x\left[-x + \frac{ay}{b}\right] = -(x-a)$$

e, por conseguinte,

$$a_x = \frac{b(x-a)}{xb-ya}\,. \tag{2.5}$$

Vamos repetir esse processo, derivando agora as equações (2.4) em y:

$$\begin{cases} 2\,a\,a_y + 2\,b\,b_y = 0 \\ 2\,(x-a)\,(-a_y) + 2\,(y-b)\,(1-b_y) = 0 \end{cases}.$$

Assim,

$$\begin{cases} a_y = -\frac{b\,b_y}{a} \\ (x-a)\,(-a_y) + (y-b)\,(1-b_y) = 0 \end{cases}.$$

Logo, $(x-a)\,\frac{b\,b_y}{a} + (y-b)\,(1-b_y) = 0$ e, portanto,

$$b_y\left[(x-a)\,\frac{b}{a} - (y-b)\right] + (y-b) = 0\,,$$

isto é,

$$b_y\left[\frac{x\,b}{a} - y\right] = -(y-b)$$

e, por conseguinte,

$$b_y = \frac{-a(y-b)}{xb-ya}\,. \tag{2.6}$$

Finalmente, somando (2.5) com (2.6), temos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Div}(a,b) &= a_x + b_y \\ &= \frac{b(x-a)}{xb-ya} + \frac{-a(y-b)}{xb-ya} \\ &= \frac{bx-ay}{xb-ya} = 1\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Concluímos, então, que $\operatorname{Div}(a,b) = 1$ e, portanto, $\dfrac{\partial G_2}{\partial x} - \dfrac{\partial G_1}{\partial y} = 1$.

Pelo Teorema de Green, sabemos que:

$$\iint_D \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_\sigma G(x,y)\cdot d\mathbf{r} \tag{2.8}$$

Ora, o lado esquerdo de (2.8) é exatamente a área da região envolvida, enquanto o lado direito vale $2\pi\rho r n_0$. Obtemos assim uma associação entre a área da região e o número de voltas dadas pelo disco.

Considerando que ρ e r precisariam ser medidos, a constante $2\pi\rho r$ poderia introduzir um erro grande no cálculo da área. Para minimizar este problema costuma-se estimar seu valor procedendo de forma experimental. Isto é, utiliza-se o planímetro para medir uma área conhecida (por exemplo, um quadrado) e, com este resultado pode-se determinar um valor com boa aproximação para $2\pi\rho r$.

Suponha agora que o disco não esteja sobre a extremidade livre do braço móvel. Na foto mostrada na Figura 1 o disco está instalado *atrás* da articulação e seu centro não está sobre a linha do braço móvel. Neste caso, o centro do disco percorre a curva

$$\sigma_r(t) = \sigma(t) + \frac{q}{r}(\sigma_a(t) - \sigma(t)) + \frac{s}{r}G(\sigma(t))\,,$$

onde $q \in \mathbb{R}$ (no caso do aparelho da Fig. 1, $q > 1$), $\sigma_a(t) = (a(x(t)), b(x(t)))$ é a parametrização do movimento da articulação e $|s|$ dá a distância entre o centro do disco e a linha central do braço móvel. Note que $G(\sigma(t))$, pela maneira como foi definido, é a rotação de $\sigma_a(t) - \sigma(t)$ no sentido horário.

Se Ω é a rotação líquida total do disco, então

$$\begin{aligned} \rho r\Omega &= \int_\alpha^\beta G(\sigma(t))\cdot\sigma_r'(t)dt \\ &= \int_\alpha^\beta G(\sigma(t))\cdot\sigma'(t)dt \\ &+ \frac{q}{r}\int_\alpha^\beta G(\sigma(t))\cdot(\sigma_a'(t) - \sigma'(t))dt \\ &+ \frac{s}{r}\int_\alpha^\beta G(\sigma(t))\cdot\frac{d}{dt}G(\sigma(t))\,. \end{aligned} \tag{2.9}$$

A primeira integral é a mesma que já calculamos usando o Teorema de Green e vale a área da figura contornada. Vamos mostrar que as outras duas integrais são nulas, concluindo assim que a posição do disco não altera o resultado da integral de linha.

Como $G(\sigma(t))$ tem norma constante e igual a r, a imagem da curva $t \mapsto G(\sigma(t))$ está contida no círculo de raio r e centro na origem. Portanto sua derivada é sempre ou nula ou ortogonal à posição e, assim, o produto escalar da terceira integral é zero. Em seguida escrevemos $\sigma(t) - \sigma_a(t) = r(\cos\theta(t), \operatorname{sen}\theta(t))$. Logo $G(\sigma(t)) = r(-\operatorname{sen}\theta(t), \cos\theta(t))$ e o segundo integrando fica igual a $\theta'(t)$. A integral $\int_\alpha^\beta \theta'(t)dt$ poderia dar qualquer múltiplo de 2π, mas dá zero se o número de voltas líquidas do braço móvel for zero. Ora, mas isso segue do fato de que o número de voltas líquidas do braço fixo é zero e também do fato de que o ângulo entre os dois braços na articulação só varia num intervalo de tamanho π.

Para escrever este texto consultamos inúmeras fontes que não podemos deixar de mencionar. Para a biografia de Green, nossa fonte principal foi o já citado livro [2], mas *websites* também nos trouxeram subsídios [11, 13, 7]. Sobre o planímetro, seu uso e funcionamento, citamos [10] e agradecemos especialmente ao editor Eduardo Colli pelo cuidado na revisão do artigo e pela colaboração ao provar, no final do texto, que nossos cálculos, feitos sob a hipótese de que o disco estaria na ponta do braço móvel, podem ser generalizados. De nossa parte, buscando desenvolver um texto acessível para estudantes de cálculo em geral, procuramos utilizar resultados e ferramentas próprias a este nível de conhecimento evitando, assim, tanto o tratamento pela geometria plana quanto o que utiliza curvas integrais e noções de equações diferenciais.

Referências

[1] British Science Association. *www.britishscienceassociation.org/*

[2] Cannell, D. M. *George Green, miller and mathematician, 1793 – 1841*. City of Nottingham Arts Department, 1988.

[3] Cannell, D. M. *George Green, mathematician and physicist, 1793 – 1841: the background to his life and work*. London: Athlone Press, 1993.

[4] Cannell, D. M. *George Green, mathematician and physicist, 1793 – 1841: the background to his life and work*. 2. ed. Philadelphia: SIAM, 2001.

[5] Casseman, B.; Eggers, J. The mathematics of surveying: Part II. The planimeter. Acesso em *www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-surveying-two*

[6] Graves, D. Resenha de [4]. Acesso em *www.maa.org/publications/maa-reviews/george-greenmathematician-and-physicist-1793-1841-the-background-to-his-life-and-work*. Mathematical Association of America, 2001.

[7] Green, G. *Mathematical papers of the late George Green*. Ed. by N. M. Ferrers. Ann Arbor: University of Michigan, 2005. Acesso em *quod.lib.umich.edu/u/umhistmath/*.

[8] Green, G. *Mathematical papers of the late George Green*. Ed. by N. M. Ferrers. London: MacMillan, 1871. (The University of Michigan Historical Mathematics Collection)

[9] Guidorizzi, H. L. *Um curso de cálculo*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 3.

[10] Knill, O. The planimeter and the theorem of Green. Acesso em *www.math.harvard.edu/~knill/teaching/math21a2000/planimeter/index.html*.

[11] Knill, O.; Dale, W. *Green's theorem and the planimeter*. With the assistance of David Smith. Acesso em *www.math.duke.edu/education/ccp/materials/mvcalc/green*.

[12] Kunkel, P. *The planimeter*. Acesso em *whistleralley.com/planimeter/planimeter.htm*.

[13] O'Connor, J. J.; Robertson, E. F. Green, G. MacTutor History of Mathematics Archive, 1998. *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Green.html*

[14] School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland. *Indexes of biographies*. Acesso em *www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Green.html*.

[15] Smith, C. D. M. Cannell, George Green, mathematician and physicist, 1793–1841. London: Athlone, 1993. *The British Journal for the History of Science*, v. 27, p. 477–479, 1994.

[16] Nottingham City Council. Green's Windmill and Science Centre. *www.nottinghamcity.gov.uk/article/22180/Greens-Windmill-and-Science-Centre*

Heloisa B. Medeiros, Lucia M. Menezes e Denise Oliveira Pinto
medeiros@mat.uff.br
luciamenezes@im.uff.br
denise.oliveira.pinto@gmail.com