Matrizes de Leslie e valores próprios dominantes

David Mesquita

Univ. do Porto

Matrizes de Leslie surgem naturalmente associadas a estudos demográficos, onde são usadas para modelar e descrever o comportamento de uma população ao longo do tempo. Tal estudo fica simplificado se estas matrizes satisfizerem certas propriedades que permitam decidir, no modelo onde se aplicam, as tendências demográficas das populações em causa. Destas propriedades, uma, que tem especial relevância, é a existência de valores próprios *especiais*. Neste artigo, demonstrar-se-á um critério para decidir se o valor próprio positivo destas matrizes é dominante.

1 Introdução

1.1 As matrizes de Leslie e o resultado principal

Começamos este artigo com uma breve introdução às matrizes de Leslie. O leitor interessado em conhecer mais de perto a aplicabilidade destas matrizes aos modelos populacionais, pode consultar [1], cap. 11, p. 743–761, para o mesmo fim, do qual retiramos as informações principais para esta seção.

Definição 1.1. *Chamamos **matriz de Leslie** de ordem n a uma matriz real da forma*

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

onde se têm

1. $a_i \geq 0$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$;
2. *existe* $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ *tal que* $a_{i_0} > 0$ *e*
3. $0 < b_i \leq 1$, *para todo* $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

O significado demográfico dos a_i e b_i está relacionado com o seguinte: considere-se uma certa população, normalmente restrita à parte feminina, dividida em n faixas etárias, digamos $f_1, \ldots, f_n$, que usualmente compreendem um mesmo período de tempo T (se I for a idade máxima atingida pelos elementos da população, considera-se $T = I/n$). Então, a_i representa uma medida de fertilidade dos indivíduos da faixa etária f_i, digamos, o número médio de descendentes que cada fêmea deixa durante o período T em que se encontra nessa faixa etária. A exigência da propriedade 2 significa precisamente a existência de pelo menos uma faixa etária fértil, quer dizer, estamos a modelar uma população que se reproduz. Por sua vez, b_i representa uma taxa de sobrevivência dos mesmos indivíduos à faixa etária seguinte no correr do período T e, portanto, por definição, assume-se que $0 < b_i \leq 1$ (se algum b_i fosse nulo, significaria que ninguém sobreviveria para além da faixa etária f_i). O leitor poderá confirmar que, se designarmos um vetor de distribuição etária inicial $v_0 \in \mathbb{R}^n$ cuja i-ésima entrada é a quantidade de indivíduos na faixa etária f_i num momento inicial t_0, então o vetor $v_k = Lv_{k-1}$ modelará a distribuição da população no tempo $t_k = t_{k-1} + T$ e, assim, em tempos discretos $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots$, se vai observando a dinâmica da população.

De um ponto de vista puramente matemático, o que importa salientar para este artigo é que estas matrizes têm uma primeira linha de termos não negativos com algum termo positivo, uma subdiagonal de termos positivos e todas as restantes entradas são nulas. Desta feita, recordaremos agora alguns conceitos de álgebra linear que serão necessários para a formulação do resultado principal deste artigo. Fá-lo-emos não da maneira mais geral possível, mas de maneira prática e direta, restringindo-nos ao caso em estudo. Na nossa notação, $M_n(K)$ designa o anel unitário das matrizes quadradas de ordem n sobre o corpo K.

Definição 1.2. *Dada uma matriz $L \in M_n(\mathbb{C})$, dizemos que o escalar $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ é um* valor próprio *de L se existir um vetor $v \in \mathbb{C}^n$, não nulo, tal que*

$$Lv = \lambda_0 v\,.$$

Diz-se que o vetor v da definição acima é um *vetor próprio* de L associado ao valor próprio λ_0, podendo também dizer-se que λ_0 é um valor próprio associado ao vetor próprio v. O *polinômio característico* de L é o polinômio

$$p_L(\lambda) := \det(\lambda I - L)\,,$$

cujas raízes são precisamente os valores próprios de L. No caso das matrizes de Leslie, o polinômio característico admite uma expressão simples em termos dos elementos a_i e b_i, que se pode demonstrar ser igual a

$$p_L(\lambda) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - \cdots - a_nb_1 \ldots b_{n-1}\,.$$

Diremos que λ_0 é um valor próprio *simples* se for uma raiz simples, i.e., com multiplicidade algébrica 1, do polinômio característico de L. Uma matriz de Leslie tem sempre um único valor próprio positivo λ_0, que se prova ser também simples. Mais do que isso, λ_0 goza da seguinte propriedade: $|\lambda_0| \geq |\mu|$ para qualquer outro valor próprio μ de L, resultados que o leitor pode encontrar na fonte citada no início desta seção. Contudo, para facilitar a descrição da dinâmica da população, gostaríamos que a desigualdade atrás fosse estrita. Diremos então que o valor próprio λ_0 de L é *(estritamente) dominante* se $|\lambda_0| > |\mu|$ para qualquer outro valor próprio μ de L. Com isto, podemos enunciar o resultado principal deste artigo.

Teorema 1.3. *Sejam $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ as entradas positivas da primeira linha de uma matriz de Leslie L. Então o valor próprio positivo de L é dominante se e só se $\mathrm{mdc}(i_1, \ldots, i_k) = 1$.*

Em particular, este resultado generaliza aquele que pode ser encontrado, com outra formulação, em [1], cap. 11, p. 748, que é bastante útil em termos práticos e diz o seguinte:

Teorema 1.4. *Se duas entradas sucessivas da primeira linha de uma matriz de Leslie L são não nulas, então o valor próprio positivo de L é dominante.*

Repare-se que, em ambos os teoremas acima, a garantia da existência de um valor próprio dominante não dependeu do valor numérico das entradas, mas apenas se eram positivas ou nulas. A razão de ser assim ficará clara no correr do artigo, quando demonstrarmos o resultado principal (ver Seção 2). A importância deste valor próprio em termos populacionais, chamemos-lhe λ_0, tal como o nome indica, é a dominação das tendências demográficas da população em causa no futuro. De fato, com esta hipótese, o que o modelo prevê para tempos discretos t_k suficientemente grandes é que os vetores de distribuição etária tendam a satisfazer a relação

$$v_k \approx \lambda_0 v_{k-1}\,,$$

i.e., o vetor seguinte torna-se praticamente um múltiplo escalar do vetor anterior e, portanto, a proporção das fêmeas nas faixas etárias tende a estabilizar. Assim, se $\lambda_0 < 1$, a população acaba por se extinguir com o correr do tempo; se, ao invés, tivermos $\lambda_0 > 1$, o modelo prevê que a população aumenta; em ambos os casos pode-se prever a estabilização da proporção de fêmeas esperada com recurso ao vetor próprio v associado a λ_0. O caso $\lambda_0 = 1$ determina um crescimento populacional nulo e, na fonte acima citada, o leitor pode ler que uma condição necessária e suficiente para tal acontecer é que

$$R := a_1 + a_2b_1 + \cdots + a_nb_1 \ldots b_{n-1} = 1\,.$$

A expressão R, chamada a *taxa líquida de reprodução*, admite uma interpretação demográfica interessante: precisamente o número médio de filhas que se espera que uma fêmea tenha ao longo da sua vida. Grosso modo, se o que nasce é igual ao que morre, tudo fica na mesma.

1.2 O Problema das moedas de Frobenius

Para os nossos propósitos, iremos recorrer a um resultado da teoria de números que teve os seus primórdios em Frobenius. É conhecido, no folclore matemático, como o *Problema das Moedas* (*Coin Problem*) e pode ser encontrado, por exemplo, em [3], §C7, p. 63, com a seguinte formulação:

Teorema 1.5 (Frobenius). *Dados k inteiros $0 < n_1 < n_2 < \cdots < n_k$ tais que $\mathrm{mdc}(n_1, n_2, \ldots, n_k) = 1$, a equação*

$$N = \sum_{i=1}^{k} n_i x_i \tag{1.1}$$

admite uma solução em inteiros não negativos $x_1, \ldots, x_k$ *se* N *for um número natural suficientemente grande.*

Um número N para o qual (1.1) admite uma solução nas condições acima diz-se *representável*. Uma leitura importante deste teorema é a seguinte: *a partir de uma certa ordem, todos os números naturais são representáveis*, ou seja, o número de naturais não representáveis é finito. Este resultado será importante na demonstração do Teorema 1.3 (ver Seção 2). Na mesma fonte onde pode ser visto o teorema acima, o leitor poderá também encontrar um conjunto de majorações para o maior natural não representável, denotado por $G(n_1, \ldots, n_k)$, e, em particular, constatar que

$$G(n_1, n_2) = (n_1 - 1)(n_2 - 1) - 1 = n_1 n_2 - n_1 - n_2 \tag{1.2}$$

é a solução explícita do caso $k = 2$.

A Tabela 1 ilustra os números representáveis entre 1 e 40 (marcados com um asterisco) quando $n_1 = 5$ e $n_2 = 8$. Como podemos confirmar, $5 \times 8 - 5 - 8 = 27$ é, de fato, o maior natural não assinalado. Quer dizer, se em algum sistema monetário tivéssemos moedas (em número suficiente!) de 5 e 8 cêntimos, poderíamos pagar diretamente todas as quantias a partir de 27 cêntimos sem necessidade de recorrer a trocos. A Tabela 1 sugere uma prova geral de (1.2) que o leitor mais interessado poderá tentar adivinhar e redigir.

1	2	3	4	∗ 5	6	7	∗ 8
9	∗ 10	11	12	∗ 13	14	∗ 15	∗ 16
17	∗ 18	19	∗ 20	∗ 21	22	∗ 23	∗ 24
∗ 25	∗ 26	27	∗ 28	∗ 29	∗ 30	∗ 31	∗ 32
∗ 33	∗ 34	∗ 35	∗ 36	∗ 37	∗ 38	∗ 39	∗ 40

Tabela 1: Números representáveis de 1 a 40, quando $n_1 = 5$ *e* $n_2 = 8$.

1.3 O Teorema de Perron-Frobenius

O seguinte teorema, resultado que será o suporte principal da demonstração, deve-se a Perron e Frobenius, dos quais recebe o nome. Das várias formulações possíveis, usaremos a seguinte, que se pode encontrar em [2], p. 53–55.

Teorema 1.6 (Perron-Frobenius). *Seja* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *uma matriz com entradas não negativas e tal que* M^k *tem todas as entradas positivas para algum* $k \in \mathbb{N}$. *Então* M *tem (a menos de escalar) um vetor próprio* v *com todas as entradas positivas e nenhum outro vetor próprio tem todas as coordenadas não-negativas. Além disso, o valor próprio associado a* v *é positivo, simples e dominante.*

Observe-se que o Teorema de Perron-Frobenius, por si só, é uma condição suficiente do tipo da do Teorema 1.4. Todavia, no caso das matrizes de Leslie pode ser consideravelmente simplificada e melhorada, precisamente o propósito dos Teoremas 1.4 e 1.3, oferecendo este último, para além de uma condição suficiente, também uma necessária.

2 Demonstração do resultado principal

Seja L uma matriz de Leslie de ordem n arbitrária. Recordemos da definição de L que

1. $L_{i,j} \geq 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$ e
2. $L_{i,i+1} = b_i > 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Sejam $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ as entradas não nulas da primeira linha, com $i_1 < \cdots < i_k$, e consideremos a submatriz quadrada L_{i_k} induzida de L pelas i_k primeiras linhas e colunas, igualmente uma matriz de Leslie. Usando a fórmula do polinômio característico dada na Subseção 1.1, deduz-se a seguinte relação entre os polinômios característicos de L e L_{i_k}:

$$p_L(\lambda) = \lambda^{n-i_k} \, p_{L_{i_k}}(\lambda)\,.$$

Fica assim claro que L admite um valor próprio real, positivo, simples e dominante se e somente se o mesmo suceder para L_{i_k}. Por esta razão e por uma questão de simplicidade, passaremos a supor de agora em diante, sem perda de generalidade, que $a_n > 0$ (ou seja, $i_k = n$).

2.1 A parte suficiente do teorema

Demonstraremos que se $\mathrm{mdc}(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) = 1$, existe s tal que L^s tem todas as entradas positivas, seguindo então esta implicação do Teorema de Perron-Frobenius. Primeiramente, vamos fazer uma simplificação, associando a L uma matriz que se obtém desta da seguinte maneira.

Definição 2.1. *Dada $L \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas, chamamos $\widehat{L}$ à matriz cujas entradas se definem por*

$$\widehat{L}_{i,j} = \begin{cases} 0 & se \quad L_{i,j} = 0 \\ 1 & se \quad L_{i,j} > 0 \end{cases} .$$

A título de exemplo, deixamos abaixo a transformação de uma possível matriz de Leslie L na respectiva matriz $\widehat{L}$:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4.2 & 2.6 \\ 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \widehat{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Repare-se que pretendemos estudar o sinal (*positivo ou nulo*) das entradas de L ao compormos a matriz consigo própria. Uma vez que estas matrizes não têm termos negativos, isso depende da estrutura da multiplicação matricial em si e não do valor numérico das entradas. Desta observação resulta o seguinte lema.

Lema 2.2. *Seja $k \in \mathbb{N}$ e $L \in M_n(\mathbb{R})$ com entradas não negativas. Então são equivalentes:*

- *Todas as entradas de L^k são positivas.*
- *Todas as entradas de $\widehat{L}^k$ são positivas.*

Assim, restringiremos o nosso estudo ao comportamento iterativo de $\widehat{L}$ em vez do de L. No próximo passo, interpretaremos $\widehat{L}$ como a matriz (de adjacência) de um grafo dirigido $\mathcal{G}$ em n vértices, digamos $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_n\}$, induzido pela relação $\widehat{L}_{i,j} = 1$ se existe a aresta dirigida (v_i, v_j) e $\widehat{L}_{i,j} = 0$ caso contrário. Tipicamente, os grafos dirigidos induzidos por uma matriz $\widehat{L}$ admitirão uma representação planar do tipo da que se ilustra na Fig. 1, constituída por um ciclo dirigido $\mathcal{C}$ que une todos os vértices: uma vez que $b_i > 0$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ e estando suposto que $a_n > 0$, temos, por definição, que existem as arestas dirigidas (v_i, v_{i+1}), para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, e a aresta (v_1, v_n), respectivamente. No mesmo grafo, surge também um conjunto de arestas dirigidas que emanam de v_1 para $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, correspondentes às entradas positivas $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$.

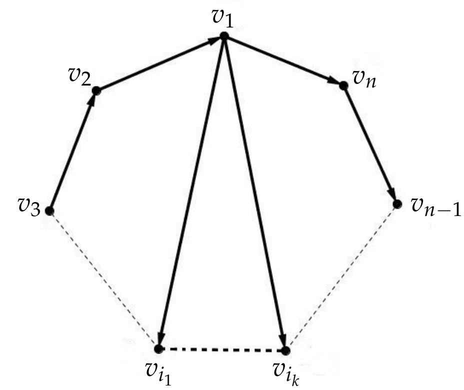

Figura 1: Representação planar de $\mathcal{G}$.

Um *passeio dirigido de comprimento p de v_i a v_j*, no grafo acima, será uma sequência de vértices $v_{s_1} v_{s_2} \ldots v_{s_{p+1}}$ tal que $v_i = v_{s_1}$, $v_j = v_{s_{p+1}}$ e $(v_{s_l}, v_{s_{l+1}})$ é uma aresta dirigida de $\mathcal{G}$, para todo $l \in \{1, \ldots, p\}$. A ideia de trabalharmos com uma matriz que admite esta interpretação natural à luz da teoria de grafos é a de que as suas potências têm também um significado natural à luz da mesma teoria, traduzido no seguinte resultado, onde, bem entendido, $\widehat{L}^p_{i,j}$ é a entrada na linha i, na coluna j, da matriz $\widehat{L}^p$.

Proposição 2.3. *Seja $\widehat{L}$ a matriz de um grafo dirigido definida acima e p um natural. Então $\widehat{L}^p_{i,j}$ conta o número de passeios dirigidos de comprimento p de v_i a v_j.*

Deste modo, podemos reduzir a questão de saber se existe algum s para o qual L^s tem todas as entradas positivas à questão de saber se para algum $s \in \mathbb{N}$ existe pelo menos um passeio dirigido de comprimento s entre quaisquer 2 vértices de $\mathcal{G}$. Vejamos que a resposta é afirmativa. Para tratar esta questão, dados v_i, $v_j \in \mathcal{V}$, designamos por $m_{i,j} \in \mathbb{N}$ o comprimento de algum passeio dirigido que comece em v_i e acabe em v_j passando numa fase intermédia por v_{i_1}. Esta designação tem sentido pois, por hipótese, existe um ciclo que passa por todos os vértices e, portanto, existem efetivamente passeios dirigidos a ligar v_i a v_j passando por v_{i_1}. Por exemplo, o passeio que parte de v_i, percorre o ciclo $\mathcal{C}$ uma vez até chegar outra vez a v_i e acaba então o seu trajeto quando encontrar v_j. Deste modo, observe-se que podemos obter passeios de comprimentos

$$m_{i,j} + \sum_{r=1}^{k} i_r x_r = m_{i,j} + i_1 x_1 + \cdots + i_k x_k \,,$$

com $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}_0$, entre v_i e v_j, simplesmente chegando a v_{i_1} e percorrendo os ciclos $\mathcal{C}_{i_1}, \ldots, \mathcal{C}_{i_k}$, de comprimentos $i_1, \ldots, i_k$, respectivamente, definidos por $\mathcal{C}_{i_\ell} = v_{i_\ell} v_{i_\ell - 1} \ldots v_1 v_{i_\ell}$.

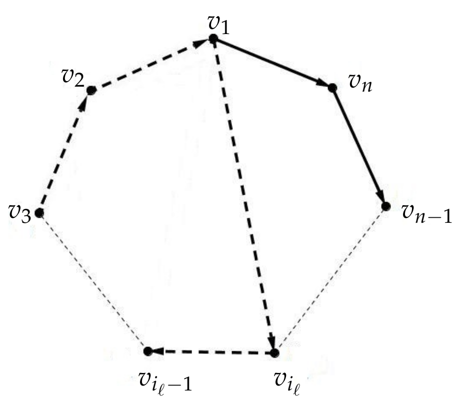

Figura 2: Ciclo $\mathcal{C}_{i_l}$, a tracejado.

Uma vez que, por hipótese, $\mathrm{mdc}(i_1, \ldots, i_k) = 1$, temos, em virtude do *Problema das Moedas de Frobenius* (Teorema 1.5), que existem passeios dirigidos com todos os comprimentos a partir de

$$\mathcal{O}_{i,j} = m_{i,j} + N$$

para um certo número natural N. Portanto, se fizermos a escolha

$$s = \max_{1 \le i,j \le n} \{\mathcal{O}_{i,j}\} \,,$$

concluímos, pela Proposição 2.3, que todas as entradas de $\widehat{L}^s$ são positivas. Pelo Lema 2.2, o mesmo sucede então para L^s e, com isto, terminamos a parte suficiente do teorema.

2.2 A parte necessária do teorema

Demonstraremos que se $\mathrm{mdc}(i_1, \ldots, i_k) = d > 1$ então nenhum valor próprio de L pode ser dominante. Com efeito, nesse caso o polinômio característico de L, em virtude da fórmula dada na Subseção 1, contém apenas termos de grau md, $m \in \mathbb{N}_0$, ou seja, é da forma

$$p_L(\lambda) = c_1 \lambda^{m_1 d} + c_2 \lambda^{m_2 d} + \cdots + c_k \lambda^{m_k d} \,.$$

A razão pela qual um polinômio desta forma não pode admitir uma única raiz complexa que em módulo é maior que todas as outras prende-se com a seguinte observação: considere-se o polinômio $P(\lambda)$ tal que

$$P(\lambda) = c_1 \lambda^{m_1} + c_2 \lambda^{m_2} + \cdots + c_k \lambda^{m_k} \,.$$

Com essa definição, temos $p_L(\lambda) = P(\lambda^d)$. É então claro que λ_0 é uma raiz de p_L se e somente se λ_0^d for uma raiz de P. Dito de outro modo, as raízes de p_L são as raízes d-árias das raízes de P. Uma vez que $d > 1$, para cada raiz λ_0 de p_L há pelo menos uma outra raiz de p_L com o mesmo módulo, precisamente uma das raízes d-árias de λ_0^d, raiz de P. Isto termina a parte necessária do teorema.

3 Agradecimentos

Este trabalho foi realizado durante a licenciatura[1] em matemática no âmbito de uma bolsa do programa *Novos Talentos em Matemática* da Fundação Calouste Gulbenkian, sob a orientação do professor Jorge Rocha, que me propôs o estudo das matrizes de Leslie e o Teorema 1.4, juntamente com conselhos importantes para a elaboração deste artigo. A ele, e por tudo, um agradecimento especial. Queria também agradecer ao Comitê Editorial da *Matemática Universitária* pelas inúmeras sugestões que permitiram melhorar a apresentação e o conteúdo deste artigo e, em particular, pela generalização do teorema inicialmente proposto, dando origem ao Teorema 1.3.

Referências

[1] Anton, H.; Rorres, C. *Elementary linear algebra - applications version*. 9a ed. New York: Wiley, 2005.

[2] Katok, A.; Hasselblatt, B. *A moderna teoria dos sistemas dinâmicos*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2005.

[3] Guy, R. K. *Unsolved problems in number theory*. Berlin: Springer, 1981.

David Mesquita
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto
dbmesquita@gmail.com

[1] No Brasil, algo como o bacharelado.