O que esperar do calor em uma placa estreita?

Vanderlei M. Nascimento e Ricardo P. Silva

IGCE/UNESP

Na modelagem matemática de fenômenos naturais, é comum presumir que certas grandezas são desprezíveis comparadas à outras. Por exemplo a profundidade de um oceano comparada à sua extensão. De todo modo, a grandeza desprezível existe tanto quanto as outras e a matemática leva isso em conta, por meio da noção de limite: se ϵ existe no modelo, o que podemos dizer ao fazermos $\epsilon \to 0$? Em cada caso, explicar o significado que se dá para "quando fazemos $\epsilon \to 0$" é explicar o que será entendido por "desprezar ϵ ".

Muitos desses aspectos estão incorporados nos chamados problemas em domínios finos, sobre os quais [7] contempla um panorama substancial.

O que consideramos neste trabalho exemplifica algumas ideias envolvidas no assunto, e, por isso mesmo, apoia-se em resultados importantes já estabelecidos. De posse deles, o tratamento que damos ao exemplo vem com o objetivo de valorizar ferramentas básicas da álgebra linear no tratamento de EDPs não lineares. Elas, juntamente com o fato de podermos tornar preciso o significado de "fazer $\epsilon \to 0$", neste caso, permitirão darmos uma resposta quanto ao que esperamos ao fazer isso.

1 Motivação

Imagine que queiramos estudar como o calor se propaga em placas retangulares de espessuras que vão tornando-se mais e mais finas. Fixando o comprimento das placas constante, digamos igual a 1, como protótipo tomamos o retângulo $\Omega^\epsilon := (0,1) \times (0,\epsilon)$, $\epsilon > 0$, e consideramos $\epsilon \to 0$. Além disso, para um modelo mais simplificado, supomos que as placas são compostas de material homogêneo e estão termicamente isoladas. Isso significa que o fluxo de calor, sem fontes externas, e com distribuição inicial de temperatura, u_0^ϵ, supostamente conhecida em cada ponto (x,y) do retângulo Ω^ϵ, é descrito pelas equações

$$\begin{cases} u_t^\epsilon = u_{xx}^\epsilon + u_{yy}^\epsilon, \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \Omega^\epsilon \\ \dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial \eta^\epsilon} = 0, \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega^\epsilon \\ u^\epsilon(0,\cdot,\cdot) = u_0^\epsilon, \text{ em } \Omega^\epsilon \end{cases}, \qquad (\tilde{P}_\epsilon)$$

onde η^ϵ denota o campo vetorial (unitário) normal às laterais $\partial\Omega^\epsilon$ da placa Ω^ϵ e $u^\epsilon = u^\epsilon(t,x,y)$ representa a temperatura no ponto (x,y) de Ω^ϵ no instante $t > 0$. Observe que $\dfrac{\partial u^\epsilon}{\partial \eta^\epsilon}(t,x,y) = 0$ nos pontos de $\partial\Omega^\epsilon$ nos diz que não há qualquer perda ou ganho de calor através das laterais $\partial\Omega^\epsilon$, em qualquer instante $t > 0$.

O operador de Laplace

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$$

é um operador linear e é na análise de seus autovalores e autofunções que seremos capazes de determinar o comportamento limite do fluxo de calor em Ω^ϵ, quando $\epsilon \to 0$. Note que, quando $\epsilon \to 0$, Ω^ϵ se colapsa no segmento $(0,1)$ e, assim, suspeitamos que, se tal comportamento limite existir, deverá ser regido por um modelo unidimensional.

2 Análise Espectral

2.1 Problema de autovalor

Para $\Omega^\epsilon = (0,1) \times (0,\epsilon)$ consideremos o problema de autovalor

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, \text{ em } \Omega^\epsilon \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta^\epsilon} = 0, \text{ em } \partial\Omega^\epsilon \end{cases}. \qquad (\tilde{A}_\epsilon)$$

Para cada $\epsilon > 0$ fixo, através do método de separação de variáveis (veja [4]), é fácil obter que (todos) os valores de λ para os quais existe uma função não nula, $u = u(x,y)$, que satisfaz a equação $(\tilde{A}_\epsilon)$, são

$$\lambda^\epsilon_{m,n} = \pi^2(m^2 + \frac{n^2}{\epsilon^2}), \quad m,n = 0,1,2,\cdots$$

e que, além disso, a respectiva autofunção associada a $\lambda^\epsilon_{m,n}$ é

$$u^\epsilon_{m,n}(x,y) = \cos(m\,\pi\,x)\cos(\frac{n\,\pi}{\epsilon}\,y)\,.$$

Munido da norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega^\epsilon} |u(x,y)|^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}},$$

o espaço das (classes de equivalência das) funções cujo quadrado é integrável a Lebesgue (veja por exemplo [8]), é completo e usualmente denotado por $L^2(\Omega^\epsilon)$. Também, como esta norma é induzida pelo produto interno

$$\langle u,v\rangle = \int_{\Omega^\epsilon} u(x,y)v(x,y)\,dxdy\,,$$

$L^2(\Omega^\epsilon)$ é um espaço de Hilbert. Autofunções, $u^\epsilon_{m,n}$ e $u^\epsilon_{m',n'}$, associadas a autovalores distintos, $\lambda^\epsilon_{m,n}$ e $\lambda^\epsilon_{m',n'}$ respectivamente, são ortogonais. De fato, integrando por partes, vê-se que, para quaisquer $(m,n) \neq (m',n')$,

$$\langle u^\epsilon_{m,n}, u^\epsilon_{m',n'}\rangle = \int_{\Omega^\epsilon} \cos(m\,\pi\,x)\cos(\frac{n\,\pi}{\epsilon}\,y)\,\cos(m'\,\pi\,x)\cos(\frac{n'\,\pi}{\epsilon}\,y)\,dxdy = \int_0^1 \cos(m\,\pi\,x)\cos(m'\,\pi\,x)\,dx \int_0^\epsilon \cos(\frac{n\,\pi}{\epsilon}\,y)\cos(\frac{n'\,\pi}{\epsilon}\,y)dy = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\|u^\epsilon_{m,n}\| &= \left[\int_{\Omega^\epsilon} |u^\epsilon_{m,n}|^2 dxdy\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_0^1 |\cos(m\,\pi\,x)|^2 dx \int_0^\epsilon |\cos(\frac{n\,\pi}{\epsilon}\,y)|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{\epsilon}}{a_{m,n}}\,,\end{aligned}$$

onde $a_{0,0} = 1$, $a_{m,0} = a_{0,n} = \sqrt{2}$ e $a_{m,n} = 2$ para $m,n = 1,2,\ldots$.

Portanto, as funções

$$w^\epsilon_{m,n}(x,y) = \frac{a_{m,n}}{\sqrt{\epsilon}}\cos(m\,\pi\,x)\cos(\frac{n\,\pi}{\epsilon}\,y),\ m,n = 0,1,2,\ldots$$

constituem um sistema ortonormal em $L^2(\Omega^\epsilon)$. Como também é possível mostrar (veja [1]) que esse sistema é completo temos

$$u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \langle u, w^\epsilon_{m,n}\rangle\, w^\epsilon_{m,n}, \quad \forall u \in L^2(\Omega^\epsilon). \tag{2.1}$$

É fácil ver, para $T : L^2(\Omega^\epsilon) \to L^2(\Omega^\epsilon)$ linear e contínuo, que a convergência das somas parciais em (2.1) implica em

$$Tu = \sum_{m,n=0}^{\infty} \langle u, w^\epsilon_{m,n}\rangle\, Tw^\epsilon_{m,n}\,.$$

Entretanto, mesmo não sendo $-\Delta$ um operador contínuo de $L^2(\Omega^\epsilon)$, também temos[1]

$$-\Delta u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \langle u, w^\epsilon_{m,n}\rangle\, \lambda^\epsilon_{m,n}\, w^\epsilon_{m,n}, \quad \forall\, u \in \mathrm{Dom}(-\Delta)\,, \tag{2.2}$$

onde

$$\mathrm{Dom}(-\Delta) = \{u \in L^2(\Omega^\epsilon) : \sum_{m,n=0}^{\infty} [\langle u, w^\epsilon_{m,n}\rangle\, \lambda^\epsilon_{m,n}]^2 < \infty\}\,.$$

2.2 Mudando de variáveis

Ao considerarmos a mudança de variáveis

$$\Phi_\epsilon : (x_1,x_2) \mapsto (x,y) := (x_1, \epsilon x_2)\,,$$

que transforma a placa (fixa) $\Omega = (0,1)\times(0,1)$ na placa Ω^ϵ, se $u = u(x,y)$ é solução do problema $(\tilde{A}_\epsilon)$, então, pela regra da cadeia, $v = u \circ \Phi_\epsilon$ é solução do problema

$$\begin{cases} -v_{x_1x_1} - \dfrac{1}{\epsilon^2} v_{x_2x_2} = \lambda v, \text{ em } \Omega \\ v_{x_1}\eta_{x_1} + \dfrac{1}{\epsilon^2} v_{x_2}\eta_{x_2} = 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{A_ϵ}$$

onde $\eta = (\eta_{x_1}, \eta_{x_2})$ denota o campo vetorial (unitário) normal às laterais $\partial\Omega$ da placa Ω. Similarmente, se $v = v(x_1,x_2)$ é solução de (A_ϵ), então $u = v \circ \Phi_\epsilon^{-1}$ é solução de $(\tilde{A}_\epsilon)$. Portanto a mudança Φ_ϵ transforma soluções do problema $(\tilde{A}_\epsilon)$ em soluções do problema (A_ϵ). Da mesma forma, as soluções do problema $(\tilde{P}_\epsilon)$ são transformadas em soluções do problema

$$\begin{cases} v^\epsilon_t = v^\epsilon_{x_1x_1} + \dfrac{1}{\epsilon^2} v^\epsilon_{x_2x_2}, \text{ em } \mathbb{R}^+ \times \Omega \\ v^\epsilon_{x_1}\eta_{x_1} + \dfrac{1}{\epsilon^2} v^\epsilon_{x_2}\eta_{x_2} = 0, \text{ em } \partial\Omega, \\ v^\epsilon(0,\cdot,\cdot) = v^\epsilon_0, \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{P_ϵ}$$

[1] Ao leitor interessado sugerimos a seção sobre operadores compactos e autoadjuntos em [1].

considerando-se $v_0^\epsilon = u_0^\epsilon \circ \Phi_\epsilon$.

Cálculos diretos mostram que, para cada $\epsilon > 0$, os autovalores do operador

$$-\Delta_\epsilon v = -v_{x_1 x_1} - \frac{1}{\epsilon^2} v_{x_2 x_2}$$

são os mesmos $\lambda_{m,n}^\epsilon = \pi^2(m^2 + \frac{n^2}{\epsilon^2})$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, porém as respectivas autofunções (normalizadas) agora independem de ϵ e são dadas por

$$v_{m,n}^\epsilon(x_1, x_2) = a_{m,n} \cos(m\,\pi\,x_1)\cos(n\,\pi\,x_2)\,, \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots$$

Como antes, as funções $v_{m,n}^\epsilon$, $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, constituem um sistema ortonormal completo de $L^2(\Omega)$ e

$$-\Delta_\epsilon u = \sum_{m,n=0}^{\infty} \langle u, v_{m,n}^\epsilon \rangle\, \lambda_{m,n}^\epsilon\, v_{m,n}^\epsilon, \quad \forall\, u \in \mathrm{Dom}(-\Delta_\epsilon)\,.$$

Ainda por separação de variáveis, somos capazes de expressar a solução v^ϵ do problema (P_ϵ) como

$$v^\epsilon(t, x_1, x_2) = \sum_{m,n=0}^{\infty} e^{-t\lambda_{m,n}^\epsilon} \langle v_0^\epsilon, v_{m,n}^\epsilon \rangle\; v_{m,n}^\epsilon(x_1, x_2)\,. \tag{2.3}$$

Escrevamos agora, para cada $\epsilon > 0$, os autovalores $\lambda_{m,n}^\epsilon$ em ordem crescente (levando em conta suas multiplicidades):

$$\lambda_1^\epsilon \;\le\; \lambda_2^\epsilon \;\le\; \lambda_3^\epsilon \;\le\; \ldots$$

Como, para cada natural k, existe um valor de parâmetro ϵ_k que pode ser tomado de modo a que $\pi^2 k^2 \le \dfrac{\pi^2}{\epsilon_k^2}$, então, sempre que $0 < \epsilon \le \epsilon_k$,

$$\lambda_1^\epsilon = 0\,,\ \lambda_2^\epsilon = \lambda_{1,0}^\epsilon\,,\ \lambda_3^\epsilon = \lambda_{2,0}^\epsilon\,,\ \ldots\,,\ \lambda_{k+1}^\epsilon = \lambda_{k,0}^\epsilon\,.$$

Portanto

$$\lambda_n^\epsilon \overset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \pi^2(n-1)^2 := \lambda_n^0\,,$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Da mesma forma, a sequência de autofunções v_n^ϵ, associada à sequência λ_n^ϵ, converge trivialmente (quando $\epsilon \to 0$), para a função

$$v_n^0(x_1, x_2) = \sqrt{2}\,\cos(n\,\pi\,x_1)\,,$$

para todo $n = 1, 2, \ldots$.

Este comportamento dos autovalores do operador $-\Delta_\epsilon$, no qual o primeiro autovalor "associado à decomposição na direção x_2" explode quando $\epsilon \to 0$, é fundamental para a caracterização do limite para (P_ϵ), pois ao reconhecermos λ_n^0 e v_n^0, $n = 1, 2, \ldots$, observamos que são, respectivamente, os autovalores e autofunções (normalizadas) do problema unidimensional

$$\begin{cases} -v_{xx} = \lambda v, \text{ em } (0,1) \\ v_x(0) = v_x(1) = 0 \end{cases}. \tag{A_0}$$

Similarmente, o espaço $L^2(0,1)$ das funções definidas no intervalo $(0,1)$ com quadrado integrável a Lebesgue e munido do produto interno

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)\,dx$$

é um espaço de Hilbert, as funções v_n^0 constituem um sistema ortonormal completo e

$$-\frac{d^2}{dx^2}\,v = \sum_{k=1}^{\infty} (v, v_k^0)\,\lambda_k^0\, v_k^0, \quad \forall\, v \in \mathrm{Dom}(-\frac{d^2}{dx^2})\,,$$

onde

$$\mathrm{Dom}(-\frac{d^2}{dx^2}) = \{v \in L^2(0,1) : \sum_{k=1}^{\infty} \Big[(v, v_k^0)\,\lambda_k^0\Big]^2 < \infty\}\,.$$

Também a solução $v^0 = v^0(t,x)$ do problema unidimensional

$$\begin{cases} v_t = v_{xx}, \text{ em } \mathbb{R}^+ \times (0,1) \\ v_x(t,0) = v_x(t,1) = 0,\ t > 0 \\ v(0,\cdot) = v_0^0, \text{ em } (0,1) \end{cases} \tag{P_0}$$

é dada na forma

$$v^0(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k^0} (v_0^0, v_k^0)\, v_k^0(x)\,. \tag{2.4}$$

3 Redução da dimensão

Dada uma função $u : (0,1) \to \mathbb{R}$, consideramos $\hat{u} : \Omega \to \mathbb{R}$ definida por $\hat{u}(x,y) = u(x)$. Assim, podemos ver o espaço $L^2(0,1)$ como um subespaço de $L^2(\Omega)$ e considerar o operador $-\dfrac{d^2}{dx^2}$ atuando nesse subespaço. Na sequência usaremos sem qualquer menção esta identificação.

Com a notação acima, os vetores $\hat{v}_n^0$ constituem um sistema ortonormal completo de $L^2(0,1)$ e

$$\hat{v}^0(t,x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k^0} \langle \hat{v}_0^0, \hat{v}_k^0 \rangle \, \hat{v}_k^0(x,y)\,.$$

Portanto, da convergência espectral obtida na Seção 2, se a sequência de dados iniciais $v_0^\epsilon \in L^2(\Omega)$ converge para $\hat{v}_0^0$ em $L^2(\Omega)$, então

$$\begin{aligned} v^\epsilon(t,\cdot,\cdot) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k^\epsilon} \langle v_0^\epsilon, v_k^\epsilon \rangle \, v_k^\epsilon \stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-t\lambda_k^0} \langle \hat{v}_0^0, \hat{v}_k^0 \rangle \, \hat{v}_k^0 \\ &= \hat{v}^0(t,\cdot,\cdot)\,, \end{aligned} \tag{3.1}$$

uniformemente para t em intervalos compactos de $\mathbb{R}^+$. Sobre estes fatos indicamos ao leitor as monografias [3] e [5].

Portanto, após essa nossa análise, se perguntados fôssemos :

– O que esperar do calor em uma placa estreita ?

de pronto responderíamos:

– Esperamos que ele se remeta ao caso unidimensional.

Agradecimentos. Gostaríamos de expressar nossa gratidão aos professores Antônio Luis Pereira e Luis Augusto F. de Oliveira do IME/USP, cuja discussão informal com eles inspirou a escrita deste texto. Agradecemos também à professora Karina Schiabel, do DM/UFSCar, e ao anônimo revisor, pelas sugestões que o aprimoraram.

Referências

[1] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Berlin: Springer, 2011. (Universitext)

[2] Elsken, T. *Reaction-diffusion-equations on thin domains*. Rostock: University of Rostock, 2004.

[3] Engel, K.; Nagel, R. *One-parameter semigroups for linear evolution equations*. Berlin: Springer, 2000.

[4] Figueiredo, D. G. *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, 1977. (Projeto Euclides)

[5] Gomes, A. M. *Semigrupos de operadores lineares e aplicações às equações de evolução*. Rio de Janeiro: UFRJ, 1985. (Textos de Métodos Matemáticos UFRJ, 19)

[6] Hoffman, K.; Kunze R. *Álgebra linear*. São Paulo: Polígono, 1970.

[7] Raugel G. Dynamics of partial differential equations on thin domains. In: Johnson, R., ed. *Dynamical systems.* Berlin: Springer, 1995. p. 208–315. (Lecture Notes in Mathematics, 1609)

[8] Royden, H. L. *Real Analysis*. New York: MacMillan, 1968.

Vanderlei M. Nascimento e Ricardo P. Silva
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Universidade Estadual Paulista
vandermn@rc.unesp.br
rpsilva@rc.unesp.br