Carlos Gustavo Moreira (IMPA)

Nicolau C. Saldanha (PUC-Rio)

1

(Proposto pelos participantes do MAT-IME)

(a) Prove que todo número real $x > 1$ pode ser escrito de maneira única como

$$x = \prod_{j=1}^{\infty}(1 + \frac{1}{\alpha_j}) \ ,$$

onde os α_j são inteiros positivos, nem todos iguais a 1, tais que $\alpha_{j+1} \geq \alpha_j^2$ para todo inteiro positivo j.

(b) Prove que, se x é racional, então, na representação acima, existe um inteiro N_0 tal que $\alpha_{j+1} = \alpha_j^2$ para todo $j \geq N_0$.

2

(Proposto no Desafio em Matemática da PUC-Rio de 2008)

Um polígono convexo de $n > 3$ lados sempre pode ser decomposto em $n-2$ triângulos por $n-3$ diagonais que não se cruzam. Dizemos que uma tal decomposição é ímpar se todo vértice do polígono for vértice de um número ímpar de triângulos da decomposição. Determine para quais valores de n um polígono convexo de n lados admite decomposição ímpar.

3

(Proposto no Desafio em Matemática da PUC-Rio de 2009)

Seja $g(n) = 3^n + 2^n - n$. Seja $a_0 = 0$ e defina $a_{n+1} = g(a_n)$. Assim, $a_1 = g(a_0) = g(0) = 3^0 + 2^0 - 0 = 2$ e $a_2 = g(2) = 11$. Determine o último algarismo de a_{2010} (escrito em notação decimal).

4

(Proposto no Desafio em Matemática da PUC-Rio de 2010)

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos números naturais. Dizemos que um polinômio $P(x, y, z)$ é *trilegal* se ele satisfizer as seguintes condições:

(i) Se a, b, $c \in \mathbb{N}$ então $P(a, b, c) \in \mathbb{N}$.

(ii) Se a_0, a_1, b_0, b_1, c_0, $c_1 \in \mathbb{N}$ e $P(a_0, b_0, c_0) = P(a_1, b_1, c_1)$ então $a_0 = a_1$, $b_0 = b_1$ e $c_0 = c_1$.

(iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existem a, b, $c \in \mathbb{N}$ com $P(a, b, c) = n$.

Assim, por exemplo, $P(x, y, z) = x^3 + xy + z$ não é trilegal, pois satisfaz as condições (i) e (iii) mas não satisfaz a condição (ii). Diga se existe algum polinômio trilegal. Se existir, dê exemplo; se não existir, demonstre este fato.

5

(Proposto na segunda fase do Nível Universitário da OBM de 2012)

Neste problema, uma *caixa* é um paralelepípedo retângulo $P \subset \mathbb{R}^3$. Definimos o *tamanho* da caixa P como sendo $a^s + b^s + c^s$ onde a, b, c são os comprimentos das arestas de P nas três direções e s é um inteiro fixo. Determine para quais valores de s vale a seguinte afirmação: se uma caixa P_1 está contida em uma caixa P_0 então o tamanho de P_1 é menor ou igual ao tamanho de P_0.

Obs.: Os paralelepípedos em questão podem estar em qualquer posição. Em particular, não precisam ter lados paralelos aos eixos coordenados.

Publicamos a seguir os problemas da IV Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática, realizada de 1 a 5 de outubro de 2012 no CIMAT, em Guanajuato, México. Os 3 primeiros problemas formaram a prova do primeiro dia *da competição (realizada em 2 de outubro de 2012) e os 3 restantes a prova do segundo dia (realizada em 3 de outubro de 2012).*

6

Para cada inteiro positivo n se define A_n como a matriz de tamanho $n \times n$ tal que sua entrada a_{ij} é igual a $\binom{i+j-2}{j-1}$ para todos os $1 \leq i, j \leq n$. Calcular o valor do determinante de A_n.

7

Um conjunto $A \subset \mathbb{Z}$ é *simpático* se sempre que $x, y \in A$ com $x \leq y$ temos também que $2y - x \in A$. Demonstrar que se A é simpático e 0, a, $b \in A$ com $0 < a < b$ e $d = \text{mdc}(a, b)$ então

$$a + b - 3d, a + b - 2d \in A\ .$$

8

Sejam a, b, c os lados de um triângulo. Demonstrar que

$$\sqrt{\frac{(3a+b)(3b+a)}{(2a+c)(2b+c)}} + \sqrt{\frac{(3b+c)(3c+b)}{(2b+a)(2c+a)}} + \sqrt{\frac{(3c+a)(3a+c)}{(2c+b)(2a+b)}} \geq 4\ .$$

9

Seja $f(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{x}$. Encontrar

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^T \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx\ .$$

10

Seja $D = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Uma *função de direção* para D é uma função $f : D \times D \to \{0, 1\}$. Um real $r \in [0, 1]$ é *compatível* com f se podemos escrevê-lo na forma $r = \sum_{j=1}^{\infty} \dfrac{d_j}{10^j}$ com $d_j \in D$ e $f(d_j, d_{j+1}) = 1$ para todo inteiro positivo j.

Determinar o menor inteiro k tal que para toda função de direção f, se há k reais compatíveis com f então há infinitos reais compatíveis com f.

11

Sejam $n \geq 2$ e $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes reais. Demonstrar que se existe um inteiro positivo k tal que $(x-1)^{k+1}$ divide $p(x)$ então

$$\sum_{j=0}^{n-1} |a_j| > 1 + \frac{2k^2}{n}\ .$$

Errata. *Na seção de problemas do último número (48/49), foi publicada a frase: "Foi realizada em outubro de 2010 pelo IMPA, com o apoio do IME/USP, a II Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática". O correto é: "Foi realizada em outubro de 2010, pelo IMPA, com o apoio do* **Instituto Militar de Engenharia (IME)***, a II Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática".*

Carlos Gustavo Moreira
`gugu@impa.br`

Nicolau C. Saldanha
`nicolau@mat.puc-rio.br`