Problemas

Carlos Gustavo Moreira (IMPA)

Nicolau C. Saldanha (PUC-Rio)

1

(a) Sejam $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ reais. Prove que para todo inteiro positivo N existem $r, m_1, m_2, ..., m_k$ inteiros, não todos nulos, com $|m_i| \leq N$ para todo $i \leq k$, tais que

$$|m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_k\alpha_k - r| < \frac{1}{N^k}.$$

(b) Prove que, para quase todo $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$, a seguinte condição é satisfeita:
(*) $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall r, m_1, m_2, ..., m_k \in \mathbb{Z}$, se $Q = max\{|m_i|, i \leq k\} > n_0$, então temos

$$|m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + ... + m_k\alpha_k - r| \geq \frac{1}{Q^k \log^2 Q}.$$

(c) Prove que, se $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$ satisfaz a condição $(*)$ do item anterior, então existe uma constante $C > 0$ (que pode depender de k e dos α_i) tal que, para todo inteiro $N \geq 2$, o conjunto

$$X_N = \{(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + \ldots + m_k\alpha_k) \bmod 1 \mid m_i \in \mathbb{Z}, 0 \leq m_i \leq CN\log^2 N, \forall i \leq k\}$$

é ($\frac{1}{N^k}$-denso en $[0,1]$.

Obs.: Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $x \bmod 1 = x - \lfloor x \rfloor$. E dados $Y \subset [0,1]$ e $\delta > 0$, dizemos que Y é δ-denso em $[0,1]$ se, para todo $a \in [0,1]$, existe $y \in Y$ com $|y - a| < \delta$.

Os problemas 2, 3 e 4 a seguir foram propostos na International Mathematics Competition for University Students (IMC) de 2014, realizada em Blagoevgrad, Bulgária, em julho e agosto de 2014.

2

(problema 4 do segundo dia da IMC-2014)

Dizemos que um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ está *k-quase contido* em um hiperplano se existem menos de k pontos do conjunto que não pertencem ao hiperplano. Um conjunto finito de pontos é dito *k-genérico* se não existe nenhum hiperplano que k-quase contenha o conjunto. Para cada par de inteiros positivos k e n, determine o menor inteiro $d(k,n)$ tal que todo subconjunto finito k-genérico de $\mathbb{R}^n$ contem um subconjunto k-genérico com no maximo $d(k,n)$ elementos.

3

(problema 3 do primeiro dia da IMC-2014)

Seja n um inteiro positivo. Prove que existem números reais positivos $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tais que, para qualquer escolha de sinais, o polinômio

$$\pm a_n x^n \pm a_{n-1}x^{n-1} \pm \cdots \pm a_1 x \pm a_0$$

tem n raízes reais distintas.

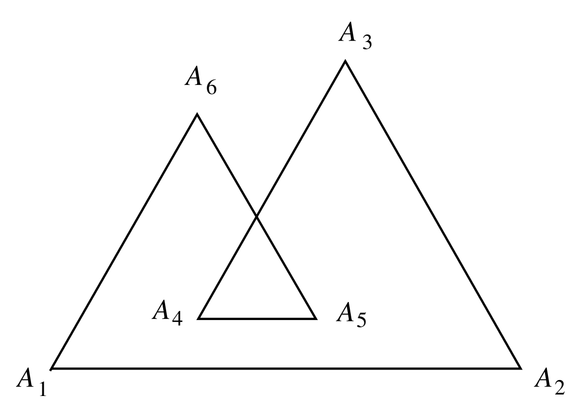
4

(problema 5 do primeiro dia da IMC-2014)

Seja $A_1 A_2 \ldots A_{3n}$ uma poligonal fechada consistindo de $3n$ segmentos de reta no plano euclidiano. Suponha que não haja três vértices colineares e que, para todo índice $i = 1, 2, \ldots, 3n$, o triângulo $A_i A_{i+1} A_{i+2}$ esteja orientado no sentido anti-horário com

$$\angle A_i A_{i+1} A_{i+2} = 60^\circ$$

(usando a notação $A_{3n+1} = A_1$ e $A_{3n+2} = A_2$).



Prove que o número de autointerseções da poligonal é menor ou igual a $\frac{3}{2}n^2 - 2n + 1$.

Publicamos a seguir os problemas da VI Competição Iberoamericana Interuniversitária de Matemática, realizada de 4 a 8 de outubro de 2014 em San José, Costa Rica. Os 3 primeiros problemas formaram a prova do primeiro dia da competição (realizada em 5 de outubro de 2014) e os 3 restantes a prova do segundo dia (realizada em 6 de outubro de 2014).

5

Seja $g : [2013, 2014] \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz as duas seguintes condições:

(a) $g(2013) = g(2014) = 0$,

(b) para quaisquer $a, b \in [2013, 2014]$, tem-se que $g\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq g(a) + g(b)$.

Demonstre que g possui zeros em qualquer subintervalo aberto $(c, d) \subset [2013, 2014]$.

6

Sejam n um inteiro positivo e p um primo maior que 2. Mostre que:

$$(p-1)^n n! \,\Big|\, (p^n - 1)(p^n - p)(p^n - p^2) \cdots (p^n - p^{n-1}) \ .$$

7

Dado $n \geq 2$, seja $\mathcal{A}$ uma família de subconjuntos do conjunto com n elementos $\{1, \ldots, n\}$ tal que, para quaisquer $A_1, A_2, A_3, A_4 \in \mathcal{A}$, se verifica que $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| \leq n - 2$.

Mostre que $|\mathcal{A}| \leq 2^{n-2}$.

Obs: $|X|$ designa a cardinalidade do conjunto X.

8

Seja (a_i) uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos. Definimos a sequência (s_k):

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{[a_i, a_{i+1}]},$$

onde $[a_i, a_{i+1}]$ denota o mínimo múltiplo comum de a_i e a_{i+1}.

Mostre que a sequência (s_k) é convergente.

9

Uma função analítica $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se chama *interessante* se $f(z)$ é real ao longo da parábola $\operatorname{Re} z = (\operatorname{Im} z)^2$.

1. Encontre um exemplo de uma função interessante que não seja constante.
2. Prove que todas as funções interessantes f satisfazem $f'(-3/4) = 0$.

10

(a) Seja (x_n) uma sequência com $x_n \in [0, 1]$ para todo n. Prove que existe $C > 0$ tal que, para todo inteiro positivo r, existem $m \geq 1$ e $n > m + r$ que cumprem $(n - m)|x_n - x_m| \leq C$.

(b) Prove que para todo $C > 0$ existem uma sequência (x_n) com $x_n \in [0, 1]$ para todo n e um inteiro positivo r tais que, se $m \geq 1$ e $n > m + r$, então $(n - m)|x_n - x_m| > C$.

Carlos Gustavo Moreira
Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada
gugu@impa.br

Nicolau C. Saldanha
PUC-Rio
saldanha@puc-rio.br