Duas aplicações do Teorema do Ultrafiltro em Análise Funcional

João Paulo Cirineu de Jesus
Rogério Augusto dos Santos Fajardo

IME/USP

No presente artigo, são apresentadas as noções de filtro, ultrafiltro e de rede universal, com o intuito de mostrar que o Teorema do Ultrafiltro, devido a A. Tarski, é suficiente para provar, na Teoria dos Conjuntos de Zermelo--Fraenkel, dois célebres princípios da Análise Funcional: o Teorema de Alaoglu e o Teorema de Hahn--Banach. A prova do Teorema de Alaoglu que será apresentada é uma sutil modificação de sua prova mais conhecida, na qual o Teorema de Tychonoff é utilizado. No entanto, a prova do Teorema de Hahn--Banach que será apresentada segue uma abordagem inspirada na Análise Não Standard de A. Robinson. Ao final do presente artigo, são feitos comentários sobre resultados que relacionam alguns princípios de escolha e maximais -- a saber, o Axioma da Escolha, o Lema de Zorn, o Teorema do Ideal Booleano Primo e o Teorema do Ultrafiltro -- com os seguintes resultados da Análise Funcional e da Geometria: o Teorema de Krein--Milman, o Paradoxo de Banach--Tarski, o Teorema de Alaoglu e o Teorema de Hahn--Banach.

1 Introdução

Desde a primeira axiomatização da Teoria dos Conjuntos por E. Zermelo, em 1908, muitos matemáticos provaram que uma vasta lista de princípios clássicos da Matemática são consequentes do Axioma da Escolha – ou até mesmo equivalentes a ele – na sua forma usual ou em outras equivalentes, tais como o Teorema da Boa Ordem, o Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff. Representando pela sigla **ZF** a Teoria dos Conjuntos de Zermelo–Fraenkel, destaquemos, a seguir, alguns fatos relacionados ao Axioma da Escolha.

Em 1929, S. Banach apresentou, em [2], a prova de um dos mais importantes princípios da Análise Funcional, que ficou conhecido posteriormente como o Teorema (da Extensão) de Hahn–Banach. Em sua prova, Banach vale-se de argumentos que podem ser estabelecidos usando os axiomas de **ZF** e o Lema de Zorn. Para quem queira saber mais sobre a história do Teorema de Hahn–Banach, recomendamos a leitura do *survey* [[5]]. Em 1940, L. Alaoglu apresentou, em [[1]], a prova de outro importante princípio da Análise Funcional, que passou a ser chamado de o Teorema de Alaoglu. Como Banach provou antes de Alaoglu este princípio restrito aos espaços vetoriais normados separáveis (cf. [[1]]), também se tornou comum chamá-lo de o Teorema de Banach–Alaoglu. A argumentação dada por Alaoglu pode ser estabelecida utilizando os axiomas de **ZF** e o Teorema de Tychonoff.

Como o Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff são ambos equivalentes ao Axioma da Escolha, a pergunta natural que surge é a seguinte: será que o Teorema de Alaoglu ou de Hahn–Banach é equivalente ao Axioma da Escolha ? Ou melhor: será que existe algum modelo (para a teoria) de **ZF**,[1] no qual o Axioma da Escolha é falso, mas o Teorema de Hanh–Banach ou de Alaoglu é verdadeiro ? Para responder a esta pergunta, uma possível estratégia é encontrar um princípio mais fraco que o Axioma da Escolha,[2] mas que implique, em **ZF**, es-

[1] Isto é, um conjunto não vazio (ou uma classe própria, em alguns casos) em que existe uma *interpretação* para a linguagem de **ZF** (ou, mais especificamente, a linguagem de primeira ordem com igualdade, acrescida do símbolo $\in$ de pertinência) segundo a qual todos os axiomas de **ZF** são verdadeiros.

[2] Ou seja, um princípio que seja consequente do Axioma da Esco-

ses dois princípios da Análise Funcional. O princípio a ser utilizado é o já citado Teorema do Ultrafiltro, que declara que "todo filtro sobre um conjunto pode ser estendido a um ultrafiltro sobre esse mesmo conjunto".

Entre 1951 e 1954, J. Łoś e C. Ryll-Nardzewski apresentaram dois resultados (um deles em [[11]] e o outro em [[10]]) que juntos estabelecem que um princípio equivalente ao Teorema do Ultrafiltro implica, em **ZF**, o Teorema de Hahn–Banach. Tal princípio equivalente é chamado de o Teorema do Ideal Booleano Primo. Em 1954, H. Rubin e D. S. Scott anunciaram, em [[21]], que o Teorema do Ideal Booleano Primo também implica, em **ZF**, o Teorema de Alaoglu. Em 1962, W. A. J. Luxemburg apresentou, em [[13]], uma prova direta de que o Teorema do Ultrafiltro implica, em **ZF**, o Teorema de Hahn–Banach.

É interessante destacar que, para obter essa prova direta, Luxemburg se inspirou no trabalho de A. Robinson, publicado um ano antes, em [[19]], onde é apresentada uma teoria (formal) que é uma *extensão própria* da Análise Real Clássica, a qual Robinson chamou de *Análise Não Standard*.[3] Destaquemos também que, enquanto a maior parte deste artigo dedica-se a apresentar a prova, em **ZF**, de que o Teorema do Ultrafiltro implica tanto o Teorema de Hahn–Banach quanto o Teorema de Alaoglu, a Seção 5 tem por objetivo apresentar outras relações, em **ZF**, desses três princípios com o Axioma da Escolha. A saber, nessa seção citamos as referências onde há as demonstrações de que esses três princípios são, de fato, mais fracos que o Axioma da Escolha, mas que dependem fortemente de alguma versão dele. Isto é, em **ZF**, pode-se provar qualquer um desses três princípios a partir do Axioma da Escolha, mas nenhum deles pode ser provado apenas em **ZF**.

Salvo menção explícita em contrário, todas as asserções, exemplos e observações apresentados nas seções a seguir podem ser estabelecidos em **ZF**, cuja consistência assumiremos ao longo deste artigo. Para aqueles que tenham interesse em saber mais sobre **ZF** e o Axioma da Escolha, sugerimos a leitura do artigo [[23]].

2 Noções preliminares

Nesta seção, apresentamos as definições de *filtro* e *ultrafiltro* e alguns resultados relacionados a elas e a outras que assumiremos conhecidas, mas que, juntamente com as notações e terminologia associadas, podem ser encontradas nos livros ou artigos tomados como referências para este artigo.

Definição 2.1. Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{F}$ uma família de subconjuntos de X. Diremos que:

(i) $\mathcal{F}$ é um **filtro** (sobre X) se valerem as seguintes condições:
   (1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $X \in \mathcal{F}$.
   (2) para quaisquer $A, B \in \mathcal{F}$, $A \cap B \in \mathcal{F}$.
   (3) Para todo $A \in \mathcal{F}$ e todo $B \subseteq X$, se $A \subseteq B$, então $B \in \mathcal{F}$.

(ii) $\mathcal{F}$ é um **ultrafiltro** (sobre X) se $\mathcal{F}$ for um filtro e valer a seguinte condição: para todo $A \subseteq X$, $A \in \mathcal{F}$ ou $X \quad A \in \mathcal{F}$.

(iii) $\mathcal{F}$ é uma **base de filtro** se $\mathcal{F}$ for não vazia, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e valer a seguinte condição: para quaisquer $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$, existe um $B_3 \in \mathcal{F}$ tal que $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

(iv) $\mathcal{F}$ tem a **PIF** (**propriedade da interseção finita**) se toda subfamília finita e não vazia de $\mathcal{F}$ tiver interseção não vazia.

Observação 2.2. Dado um conjunto não vazio X, a família $\{X\}$ é, trivialmente, o menor filtro sobre X (com respeito a inclusão). Além disso, note que qualquer filtro é uma base de filtro e que qualquer base de filtro tem a PIF. Agora, apresentemos um exemplo clássico e menos trivial de filtro sobre um

- conjunto não vazio X: para cada $x \in X$, a família dos subconjuntos de X aos quais x pertence (i.e., a família $\{A \subseteq X : x \in A\}$). É fácil ver que esta família é um ultrafiltro, o qual é chamado de o *ultrafiltro principal* em x.

lha, mas não seja equivalente a ele, em **ZF**.

[3] Com esta sua teoria, Robinson deu uma solução completa e satisfatória a um problema que persistia desde o século XVII na Matemática: a ausência de uma fundamentação rigorosa para a noção de número *infinitesimal* (e de número *infinitamente grande*), que G. W. Leibniz utilizou nos primórdios do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

- conjunto infinito X: a família dos subconjuntos cofinitos de X (i.e., a família $\{A \subseteq X : X \;\; A \text{ é finito}\}$), a qual é chamada de o *filtro de Fréchet* sobre X.

- conjunto não enumerável X: a família dos subconjuntos coenumeráveis de X (i.e., a família $\{A \subseteq X : X \;\; A \text{ é enumerável}\}$).

- espaço topológico não vazio X: para cada $x \in X$, a família das vizinhanças de x em X (i.e., a família $\{A \subseteq X : \exists\, V\, (V \text{ é aberto em } X \text{ e } x \in V \subseteq A)\}$). Note que o filtro das vizinhanças de x em X está contido no ultrafiltro principal em x.

- espaço topológico não vazio e de Baire[4] X: a família dos comagros em X (i.e., a família $\{A \subseteq X : X \;\; A \text{ é magro em } X\}$).

- espaço de medida $\langle X, \Sigma, \mu \rangle$ tal que μ é completa e $\mu(X) > 0$: a família dos subconjuntos Σ-mensuráveis de X que são conulos segundo μ (i.e., a família $\{A \in \Sigma : \mu(X \;\; A) = 0\}$).

Deixaremos como um exercício apresentar outros exemplos de filtros e um exemplo tanto de uma família não vazia que tem a PIF e não é base de filtro quanto de uma base de filtro que não é filtro.

Proposição 2.3 ([4]). *Sejam X um conjunto não vazio e $\mathcal{G}$ uma família de subconjuntos de X. Considere as seguintes famílias:*

$$\mathcal{B}(\mathcal{G}) := \{B \subseteq X : \exists\, n \in \mathbb{N} \;\; \{0\} \; \exists\, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{G}\, (B = A_1 \cap \dots \cap A_n)\}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{G}) := \{B \subseteq X : \exists\, A \in \mathcal{G}\, (A \subseteq B)\}.$$

Então:

(i) $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{G}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{G})$.

(ii) Se $\mathcal{G}$ for não vazia e tiver a PIF, então $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ é uma base de filtro.

(iii) Se $\mathcal{G}$ for uma base de filtro, então $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ é o menor filtro sobre X (com respeito a inclusão) que contém $\mathcal{G}$.

[4] Isto é, um espaço topológico no qual todo magro tem interior vazio. Lembremos que, em um espaço topológico, um conjunto é dito *magro* se for uma união enumerável de conjuntos raros – e um conjunto é dito *raro* se o seu fecho tiver interior vazio.

Note que $\mathcal{B}(\mathcal{G})$ é o conjunto das interseções finitas de membros de $\mathcal{G}$ e $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ é o conjunto dos superconjuntos dos membros de $\mathcal{G}$. Tendo esta observação em vista, a prova da proposição anterior fica fácil e será deixada a cargo do leitor. Quando a hipótese de seu item (iii) é satisfeita, diz-se que o filtro $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ é o *filtro gerado* por $\mathcal{G}$.

Prossigamos apresentando a definição de *ponto aderente* e de *convergência* para filtros.

Definição 2.4. Sejam X um espaço topológico não vazio, $x \in X$ e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X. Denotemos por $\mathcal{U}(x)$ o filtro das vizinhanças de x em X. Diremos que x é um:

(i) **ponto aderente** a $\mathcal{F}$ se $x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A}$.

(ii) **limite** de $\mathcal{F}$ (ou que $\mathcal{F}$ **converge** para x), se $\mathcal{U}(x) \subseteq \mathcal{F}$.

Dados um espaço topológico não vazio X e um $x \in X$, é imediato concluir que $\mathcal{U}(x)$ converge para x. Note que, se X for um espaço de Hausdorff, então x é o único ponto aderente a $\mathcal{U}(x)$.

Usaremos a expressão "$\mathcal{F}$ é convergente" para dizer que "existe um $x \in X$ tal que $\mathcal{F}$ converge para x".

Proposição 2.5 ([4]). *Sejam X um espaço topológico não vazio e $\mathcal{F}$ um filtro sobre X. Então:*

(i) Todo limite de $\mathcal{F}$ é um ponto aderente a $\mathcal{F}$.

(ii) Se $\mathcal{F}$ for um ultrafiltro, todo ponto aderente a $\mathcal{F}$ é um limite de $\mathcal{F}$.

A prova desta proposição é corriqueira e ficará a cargo do leitor. O teorema a seguir estabelece uma caracterização de compacidade, vista em cursos introdutórios de Topologia Geral:

Teorema 2.6 ([8], [28]). *Um espaço topológico é compacto se, e somente se, toda família não vazia de fechados nesse espaço e que tem a PIF tiver interseção não vazia.*

Corolário 2.7. *Sobre um espaço topológico não vazio e compacto, todo filtro tem um ponto aderente a si e, consequentemente, todo ultrafiltro é convergente.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico não vazio e compacto. Tome um filtro $\mathcal{F}$ qualquer sobre X. Como

$\mathcal{F}$ é uma família não vazia que tem a PIF, é imediato concluir que a família $\left\{\overline{A} : A \in \mathcal{F}\right\}$ de fechados em X é não vazia e tem a PIF. Pelo Teorema 2.6, tem-se que $\bigcap_{A\in\mathcal{F}} \overline{A} \neq \emptyset$, i.e., existe um ponto aderente a $\mathcal{F}$. Caso $\mathcal{F}$ seja um ultrafiltro, conclui-se, pela Proposição 2.5 (ii), que $\mathcal{F}$ tem um limite. □

Para apresentar a caracterização de compacidade via convergência de ultrafiltros, que será utilizada na prova que daremos do Teorema de Alaoglu, precisamos do

(**UT**) **Teorema do Ultrafiltro.** Sobre um conjunto não vazio, todo filtro está contido em algum ultrafiltro.

Este princípio foi provado originalmente por A. Tarski, em [[26]], valendo-se do Axioma da Escolha. Com o uso da Observação 2.2 e da Proposição 2.3, conclui-se facilmente a seguinte

Proposição 2.8. *Em **ZF**, são equivalentes:*

(i) ***UT**.*

(ii) Toda família de subconjuntos de um conjunto não vazio e que tem a PIF está contida em algum ultrafiltro sobre esse conjunto.

Utilizando esta proposição e o Corolário 2.7, prova-se o seguinte

Teorema 2.9 (**ZF**+ **UT**). *Um espaço topológico não vazio é compacto se, e somente se, todo ultrafiltro sobre esse espaço for convergente.*

Demonstração. Seja X um espaço topológico não vazio. Por um lado, se X for compacto, então, pelo Corolário 2.7, tem-se que todo ultrafiltro sobre X converge. Por outro lado, suponha que qualquer ultrafiltro sobre X convirja. Fixe arbitrariamente uma família não vazia $\mathcal{G}$ de fechados em X e que tem a PIF. Agora, suponha que **UT** valha. Pela Proposição 2.8, pode-se então fixar um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre X que contém $\mathcal{G}$. Como está sendo suposto que $\mathcal{U}$ tem um limite, segue da Proposição 2.5 (i) que $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} \overline{A} \neq \emptyset$. Já que todo elemento de $\mathcal{G}$ é fechado em X e $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{U}$, tem-se que $\bigcap_{A\in\mathcal{U}} \overline{A} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{G}} \overline{A} = \bigcap_{A\in\mathcal{G}} A$. Logo, a interseção de $\mathcal{G}$ é não vazia. Como $\mathcal{G}$ foi fixada arbitrariamente, então, pelo Teorema 2.6, conclui-se que X é compacto. □

3 O Teorema de Alaoglu

Na prova do Teorema de Alaoglu, usaremos a caracterização de compacidade via convergência de redes. Para poder apresentar o enunciado deste teorema e estabelecer esta caracterização, é preciso lembrar que um conjunto pré-ordenado[5] $\langle \Delta, \leqslant \rangle$ é dito *dirigido* se, para quaisquer $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$, existir um $\delta_3 \in \Delta$ tal que $\delta_3 \geqslant \delta_1, \delta_2$. Uma função de um conjunto dirigido não vazio

$$\langle \Delta, \leqslant \rangle$$

em um conjunto não vazio X é dita uma *rede* em X (com índices em Δ).[6] Denotaremos por

$$\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$$

uma rede tal que x_δ represente o seu valor no índice δ.

Com as definições e notações acima, passemos então à seguinte

Definição 3.1. Sejam X um conjunto não vazio, $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ uma rede em X, $A \subseteq X$ e $x \in X$. Diremos que:

(i) $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ **está eventualmente** em A se valer a seguinte condição: existe um $\delta_0 \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $x_\delta \in A$.

(ii) $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ é **universal** (em X) se valer a seguinte condição: para todo $B \subseteq X$, $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ está eventualmente em B ou $\langle x_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ está eventualmente em $X \quad B$.

Se X for um espaço topológico, diremos que:

[5] Ou seja, um conjunto munido de uma relação (binária) reflexiva e transitiva sobre esse mesmo conjunto.

[6] Um exemplo simples de conjunto dirigido é o conjunto $\mathbb{N}$ munido de sua ordem usual. Por esta razão, note que toda sequência é uma rede. Exemplos clássicos e menos triviais são os seguintes: para cada conjunto X, a família das partes de X munida da ordem parcial dada pela inclusão $\subseteq$ e, se X for um espaço topológico, o filtro das vizinhanças de um ponto de X munido da ordem parcial dada pela inclusão inversa $\supseteq$.

(iii) x é um **limite** de $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ (ou que $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ **converge** para x), se valer a seguinte condição: para toda vizinhança aberta V de x em X, $\langle x_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em V. Denotaremos essa condição por $x_\delta \to x$ e, quando for necessário, por $x_\delta \xrightarrow{\tau} x$, em que τ é a topologia do espaço X.

É claro que qualquer rede eventualmente constante[7] é universal. No entanto, é preciso assumir **UT** para provar a existência de redes universais que não são eventualmente constantes.

Para enunciarmos o Teorema de Alaoglu, fixemos algumas notações: dado um espaço vetorial normado real ou complexo X, denotaremos por B_X a bola fechada unitária de X, por X^* o dual topológico de X e por w^* a topologia fraca* sobre X^*. Ou seja, X^* denota o conjunto dos funcionais lineares definidos em X e contínuos segundo a norma de X e w^* denota a topologia da convergência pontual em X^*. Precisamente falando, a topologia w^* é a que satisfaz o seguinte

Lema 3.2 ([14]). *Sejam X um espaço vetorial normado real ou complexo, $\langle \varphi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ uma rede em X^* e $\psi \in X^*$. Então, $\varphi_\delta \xrightarrow{w^*} \psi$ se, e somente se, para todo $x \in X$, $\varphi_\delta(x) \to \psi(x)$.*

Prova-se que, para qualquer espaço vetorial normado real ou complexo X, o espaço topológico $\langle X^*, w^* \rangle$ é de Hausdorff. Denota-se também por w^* a topologia sobre B_{X^*} que é induzida pela topologia fraca* sobre X^*. Para mais detalhes sobre a definição de dual topológico e de topologia fraca*, sugerimos a leitura dos livros [[7, 14, 17, 22]].

Estamos agora em condições de apresentar o enunciado do

(**AL**) **Teorema de Banach–Alaoglu.** Seja X um espaço vetorial normado real ou complexo. Então, o espaço topológico $\langle B_{X^*}, w^* \rangle$ é de Hausdorff e compacto.

Sigamos apresentando um teorema que é crucial para estabelecer a prova de **AL** a partir de **UT**.

[7] Isto é, uma rede que assume um valor constante a partir de um determinado índice.

Teorema 3.3. *Dados uma família de conjuntos $\{X_i : i \in I\}$, um subconjunto não vazio Z de $\prod_{i \in I} X_i$ e uma rede $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ em Z, se I for não vazio e $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ for universal em Z, então, para todo $i \in I$, a rede $\langle \xi_\delta(i) \rangle_{\delta \in \Delta}$ é universal em X_i.*

Demonstração. Sejam $\{X_i : i \in I\}$ uma família de conjuntos, $Y = \prod_{i \in I} X_i$, Z um subconjunto não vazio de Y e $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ uma rede em Z. Suponha que I seja não vazio. Para cada $i \in I$, seja p_i a projeção de Y na i-ésima coordenada. É fácil ver que:

($*$) para todo $W \subseteq Y$, se $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ estiver eventualmente em W, então, para todo $i \in I$, a rede $\langle \xi_\delta(i) \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em $p_i[W]$.

Suponha que $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ seja universal em Z. Fixe arbitrariamente um $i \in I$ e um $A \subseteq X_i$. Para cada $j \in I$, considere o seguinte conjunto:

$$W_j := \begin{cases} A\,, & \text{se } j = i; \\ X_j\,, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Considere agora o subconjunto $W := \prod_{i \in I} W_i$ de Y. Suponha que não seja verdade que $\langle \xi_\delta(i) \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em A. Como $p_i[W] \subseteq W_i = A$, então não é verdade que $\langle \xi_\delta(i) \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em $p_i[W]$. Logo, segue de ($*$) que não é verdade que $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em W, o que implica que não é verdade que $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em $Z \cap W$. Já que $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ é universal em Z, conclui-se que $\langle \xi_\delta \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em $Z \quad (Z \cap W)$. Então, pode-se fixar um $\delta_0 \in \Delta$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, $\xi_\delta \in Z \quad (Z \cap W) \subseteq Y \quad W$. Assim, para cada $\delta \geqslant \delta_0$ em Δ, é possível fixar um $k \in I$ tal que $\xi_\delta(k) \in X_k \quad W_k$. Note que $k = i$, pois, do contrário, concluiríamos que $W_k = X_k$, uma contradição. Consequentemente, tem-se que $\langle \xi_\delta(i) \rangle_{\delta \in \Delta}$ está eventualmente em $X_i \quad A$. Portanto, como A e i foram fixados arbitrariamente, conclui-se que, para todo $i \in I$, $\langle \xi_\delta(i) \rangle_{\delta \in \Delta}$ é universal em X_i. $\square$

Observação 3.4 ([8], [28]). Dado um conjunto não vazio X, pode-se associar a cada rede em X um filtro sobre X e vice-versa, *preservando-se* os limites quando X for um espaço topológico. Com efeito:

- Por um lado, fixe uma rede ν em X e considere o seguinte conjunto: $\mathcal{F}_\nu := \{A \subseteq X : \nu \text{ está eventualmente em } A\}$. É fácil mostrar que $\mathcal{F}_\nu$ é um filtro sobre X. Além disso, verifica-se facilmente que $\mathcal{F}_\nu$ é um ultrafiltro se, e somente se, ν for universal.

- Por outro lado, fixe um filtro $\mathcal{F}$ sobre X e considere agora o seguinte conjunto: $\Delta_{\mathcal{F}} := \{\langle x, A\rangle : x \in A \in \mathcal{F}\}$. Sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$, considere a pré-ordem $\leqslant$ que é definida pela sentença seguir:

$$\text{para quaisquer } \langle x, A\rangle, \langle y, B\rangle \in \Delta_{\mathcal{F}},\ \langle x, A\rangle \leqslant \langle y, B\rangle \text{ se, e só se, } B \subseteq A.$$

  É fácil verificar que $\langle \Delta, \leqslant\rangle$ é um conjunto dirigido não vazio. Considere então a rede $\nu_{\mathcal{F}} : \Delta_{\mathcal{F}} \to X$ definida pondo, para todo $\langle x, A\rangle \in \Delta_{\mathcal{F}}$, $\nu_{\mathcal{F}}(x, A) := x$. Sem muita dificuldade, verifica-se que $\nu_{\mathcal{F}}$ é universal se, e somente se, $\mathcal{F}$ for um ultrafiltro.[8]

- Finalmente, suponha que X seja um espaço topológico e, para cada filtro $\mathcal{F}$ sobre X e cada rede ν em X, considere os seguintes conjuntos:

$$\lim \mathcal{F} := \{x \in X : x \text{ é um limite de } \mathcal{F}\},$$
$$\lim \nu := \{x \in X : x \text{ é um limite de } \nu\}.$$

  Sendo assim, é fácil mostrar que valem as seguintes igualdades:

$$\lim \nu_{\mathcal{F}} = \lim \mathcal{F} \text{ e } \lim \mathcal{F}_\nu = \lim \nu.$$

Utilizando esta observação, é imediato concluir do Corolário 2.7 o seguinte

Corolário 3.5. *Em qualquer espaço topológico não vazio e compacto, toda rede universal é convergente.*

Utilizando mais uma vez a Observação 3.4, conclui-se deste corolário e do Teorema 2.9 a seguinte caracterização de compacidade via convergência de redes universais:

Teorema 3.6 (**ZF**+ **UT**). *Um espaço topológico não vazio é compacto se, e somente se, toda rede universal nesse espaço for convergente.*

Sigamos com a apresentação de dois lemas básicos – e fáceis de provar – que serão utilizados na prova de **AL** a partir de **UT**:

Lema 3.7 ([14]). *Em um espaço topológico não vazio e de Hausdorff, toda rede convergente tem um único limite.*

Lema 3.8 ([14]). *Sejam X um espaço vetorial topológico*[9] *sobre um corpo $\mathbb{K}$, $\langle x_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}$ e $\langle y_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}$ redes em X e $x, y \in X$ tais que $x_\delta \to x$ e $y_\delta \to y$. Então, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, a rede $\langle x_\delta + \lambda \cdot y_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}$ em X converge para $x + \lambda \cdot y$.*

Cientes dos resultados e observações vistos até agora, passemos então à prova do seguinte teorema:

Teorema 3.9 (Rubin–Scott [21], **ZF**). ***UT*** *implica* ***AL***.

Demonstração. Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e X um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$. Sendo assim, verifiquemos as afirmações nos itens a seguir:

(1) $\langle B_{X^*}, w^*\rangle$ é de Hausdorff: por hereditariedade, já que é sabido que $\langle X^*, w^*\rangle$ é de Hausdorff.

(2) **UT** implica que $\langle B_{X^*}, w^*\rangle$ é compacto: tome uma rede universal $\langle \varphi_\delta\rangle_{\delta\in\Delta}$ qualquer em B_{X^*} e, para cada $x \in X$, considere o conjunto $\mathbb{K}_x := \|x\| \cdot B_{\mathbb{K}} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leqslant \|x\|\}$. Note que, para todo $x \in X$, $\mathbb{K}_x$ é não vazio, pois $0 \in \mathbb{K}_x$. Lembremos que, formalmente, o produto cartesiano $\prod_{x\in X} \mathbb{K}_x$ é o conjunto das funções f de X em $\bigcup_{x\in X} \mathbb{K}_x \subseteq \mathbb{K}$ tais que, para todo $x \in X$, $f(x) \in \mathbb{K}_x$. É claro que, para todo $\varphi \in B_{X^*}$ e todo $x \in X$, $\varphi(x) \in \mathbb{K}_x$. Logo,

[8] Basta notar o seguinte: tome um $B \subseteq X$ qualquer. Suponha que $B \in \mathcal{F}$. Então, tem-se que B é não vazio e pode-se fixar um $x_0 \in B$. Logo, $\delta_0 := \langle x_0, B\rangle \in \Delta_{\mathcal{F}}$ e, para todo $\delta = \langle x, A\rangle \geqslant \delta_0$ em $\Delta_{\mathcal{F}}$, $x \in A \subseteq B$, o que implica que $\nu_{\mathcal{F}}(\delta) \in B$. Suponha agora que $\nu_{\mathcal{F}}$ está eventualmente em B. Então, pode-se fixar um $\delta_0 := \langle x_0, A_0\rangle \in \Delta_{\mathcal{F}}$ tal que, para todo $\delta \geqslant \delta_0$ em $\Delta_{\mathcal{F}}$, $\nu_{\mathcal{F}}(\delta) \in B$. Considerando, para cada $x \in A_0$, $\delta_x := \langle x, A_0\rangle \in \Delta_{\mathcal{F}}$, tem-se que $\delta_x \geqslant \delta_0$. Logo, para todo $x \in A_0$, $x = \nu_{\mathcal{F}}(\delta_x) \in B$, o que implica que $A_0 \subseteq B$. Como $A_0 \in \mathcal{F}$, segue que $B \in \mathcal{F}$.

[9] Ou seja, um espaço vetorial munido de uma topologia segundo a qual suas operações são contínuas quando o domínio de cada uma delas está munido da topologia produto. Exemplos clássicos são os espaços vetoriais normados e os seus respectivos duais topológicos munidos da topologia fraca*.

$B_{X^*} \subseteq \prod_{x\in X} \mathbb{K}_x$ (onde esta inclusão é meramente conjuntista, e não como um subespaço topológico). Como $\langle \varphi_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ é universal em B_{X^*}, então segue do Teorema 3.3 que, para todo $x \in X$, $\langle \varphi_\delta(x) \rangle_{\delta\in\Delta}$ é universal em $\mathbb{K}_x$.

Tome um $x \in X$ qualquer. É fácil ver que $\mathbb{K}_x$ é um subespaço de Hausdorff e compacto de $\mathbb{K}$. Então, usando o Corolário 3.5 e o Lema 3.7, conclui-se que existe um único $\lambda \in \mathbb{K}_x$ tal que $\varphi_\delta(x) \to \lambda$, o qual será denotado por $\lim_{\delta\in\Delta} \varphi_\delta(x)$. Agora, considere $\psi : X \to \mathbb{K}$ definida pondo, para todo $x \in X$, $\psi(x) := \lim_{\delta\in\Delta} \varphi_\delta(x)$.[10] Pela construção, é claro que ψ está bem definida e que, para todo $x \in X$, $|\psi(x)| \leqslant \|x\|$. Além disso, segue do Lema 3.8 que, para quaisquer $x, y \in X$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\in\Delta} \varphi_\delta(x + \lambda \cdot y) &= \lim_{\delta\in\Delta} \left(\varphi_\delta(x) + \lambda \cdot \varphi_\delta(y)\right) \\ &= \lim_{\delta\in\Delta} \varphi_\delta(x) + \lambda \cdot \lim_{\delta\in\Delta} \varphi_\delta(y),\end{aligned}$$

i.e., ψ é linear sobre $\mathbb{K}$. Como $\|\psi\| \leqslant 1$, então $\psi \in B_{X^*}$. Note que, para todo $x \in X$, $\varphi_\delta(x) \to \psi(x)$. Pelo Lema 3.2, tem-se que $\varphi_\delta \xrightarrow{w^*} \psi$. Como $\langle \varphi_\delta \rangle_{\delta\in\Delta}$ foi tomada qualquer, então, em virtude do Teorema 3.6, segue o afirmado.

□

Com relação à prova acima, ressaltemos que os argumentos dados no item (2) baseiam-se no esboço de prova que é dado em [17, pp. 69-70].

4 O Teorema de Hahn–Banach

Para enunciarmos o Teorema de Hahn–Banach, fixemos inicialmente algumas notações e terminologia: dada uma função f, denotaremos por $\mathrm{dom}(f)$ o domínio de f e, dado um $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, denotaremos por $f \restriction A$ a restrição de f a A. Para funções reais g e h, diremos que g é *dominada* por h, e denotaremos por $g \leqslant h$, se $\mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(h)$ e, para todo $x \in \mathrm{dom}(g)$, $g(x) \leqslant h(x)$.

Lembremos que uma função p de um espaço vetorial real X em $\mathbb{R}$ é dita um *funcional sublinear* se, para quaisquer $x, y \in X$ e todo $\lambda \in [0, +\infty[$, valer que $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$ e que $p(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot p(x)$.

Mais à frente, apresentamos a prova, em **ZF**, de que **UT** implica o

(**HB**) **Teorema da Extensão de Hahn–Banach.** Sejam X um espaço vetorial real, Y um subespaço vetorial de X, $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear tais que $\varphi \leqslant p$. Então, existe um funcional linear $\psi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\psi \restriction Y = \varphi$ e $\psi \leqslant p$.

Observe que normas são funcionais sublineares. Sendo assim, é interessante destacar que a seguinte versão do Teorema de Hahn–Banach é um corolário do enunciado acima: "todo funcional linear definido em um subespaço vetorial de um espaço normado e contínuo segundo a norma pode ser estendido ao espaço todo, preservando-se a norma desse funcional". O enunciado mais preciso se encontra, por exemplo, em [[22], p. 617-619], onde este corolário está denotado pela sigla **HB7** e é demonstrado que **HB7** e **HB** são, na verdade, equivalentes em **ZF**.

A estratégia para provar **HB** a partir de **UT** é a seguinte:

- Definir um corpo $^*\mathbb{R}$ de *hiperreais* – analogamente ao que Robinson fez em sua Análise Não Standard – e, em seguida, estender o funcional linear p de Y em $\mathbb{R}$ a um funcional linear Ψ de X em $^*\mathbb{R}$;

- Compor Ψ com o chamado *morfismo parte standard* dos *elementos finitos* de $^*\mathbb{R}$ e, com isso, obter um funcional linear ψ de X em $\mathbb{R}$ que satisfaz a conclusão de **HB**.

[10] Observe que a unicidade do limite é que permite bem definirmos ψ em **ZF**. Formalmente, ψ é o conjunto dos pares ordenados $\langle x, \lambda \rangle \in X \times \mathbb{K}$ tais que λ é o limite de $\langle \varphi_\delta(x) \rangle_{\delta\in\Delta}$. No entanto, se não tivéssemos que cada $\mathbb{K}_x$ é de Hausdorff, $\langle \varphi_\delta(x) \rangle_{\delta\in\Delta}$ teria, possivelmente, mais de um limite em $\mathbb{K}_x$. Neste caso, seria necessário utilizar o Axioma da Escolha para fixarmos um único limite em $\mathbb{K}_x$ e, com isto, termos a imagem de x por ψ unicamente determinada por x.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, dashed, "\Psi"] \arrow[dr, dashed, "\psi"] & {}^*\mathbb{R} \\
Y \arrow[u, hook, "\subseteq"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R} \arrow[u, hook, "{}^*(\cdot)"']
\end{tikzcd}$$

Diagrama 1: Extensão de Hahn–Banach.

Note que o diagrama acima é meramente ilustrativo, não sendo suficiente para definir o funcional ψ, visto que precisaríamos, de alguma forma, "inverter" a seta de $\mathbb{R}$ em ${}^*\mathbb{R}$. Para isto, é preciso introduzir algumas definições e resultados.

A observação a seguir introduz a definição e propriedades de ${}^*\mathbb{R}$ e de noções relacionadas a esta estrutura, das quais faremos uso na prova de **HB** a partir de **UT**. No que segue, apresentamos apenas um esboço da construção rigorosa de ${}^*\mathbb{R}$, pois os detalhes técnicos que são necessários para apresentá-la devidamente estão fora do escopo deste artigo.

Observação 4.1 ([25]). Dados um conjunto não vazio I e um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I, o conjunto ${}^*\mathbb{R}$ dos *hiperreais* com respeito a $\mathcal{U}$ é o conjunto quociente de $\mathbb{R}^I$ (i.e., o conjunto das funções de I em $\mathbb{R}$) pela relação de equivalência $\equiv_{\mathcal{U}}$ sobre $\mathbb{R}^I$ que é definida pela seguinte sentença:

$$\text{para quaisquer } F, G \in \mathbb{R}^I,\ F \equiv_{\mathcal{U}} G \text{ se, e só se,}$$
$$\{i \in I : F(i) = G(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Para cada $F \in \mathbb{R}^I$, denota-se por $[F]_{\mathcal{U}}$ a classe de equivalência de F módulo $\equiv_{\mathcal{U}}$. Sobre ${}^*\mathbb{R}$, considere a relação de ordem total ${}^*\leqslant$ que é bem definida pela sentença a seguir:

$$\text{para quaisquer } F, G \in \mathbb{R}^I,\ [F]_{\mathcal{U}} \ {}^*\leqslant [G]_{\mathcal{U}} \text{ se, e só se,}$$
$$\{i \in I : F(i) \leqslant G(i)\} \in \mathcal{U}.$$

Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, considere o conjunto ${}^*\lambda := [C_\lambda]_{\mathcal{U}}$, em que $C_\lambda \in \mathbb{R}^I$ é a função constante de valor igual a λ. Então:

- Prova-se que ${}^*\mathbb{R}$ admite uma estrutura natural de corpo tal que $\langle {}^*\mathbb{R}, {}^*\leqslant \rangle$ é um corpo ordenado sobre o qual define-se, de forma natural, uma multiplicação por escalar real que o torna um reticulado vetorial.[11] Segundo tal estrutura de reticulado, a função de $\mathbb{R}$ em ${}^*\mathbb{R}$ que a cada real λ associa a classe de equivalência ${}^*\lambda$ é um monomorfismo de corpos ordenados que é linear sobre $\mathbb{R}$. Logo, $\mathbb{R}$ é, a menos de isomorfismo, um subcorpo e um sub-reticulado vetorial de ${}^*\mathbb{R}$.

- Prova-se que o conjunto $\mathcal{O} := \{x \in {}^*\mathbb{R} : \exists\, n \in \mathbb{N}\ (|x| \ {}^*\leqslant {}^*n)\}$ é um subanel de ${}^*\mathbb{R}$ que é domínio de integridade ordenado arquimediano tal que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, ${}^*\lambda \in \mathcal{O}$. Diz-se que cada elemento de $\mathcal{O}$ é um *elemento finito* de ${}^*\mathbb{R}$. É interessante destacar que $\mathbb{R}$ é, a menos de isomorfismo, um subanel de $\mathcal{O}$.[12] Prova-se também que o conjunto $o := \left\{x \in {}^*\mathbb{R} : \forall\, n \in \mathbb{N}\ \ \{0\} \left(|x| \ {}^*\leqslant \dfrac{1}{{}^*n}\right)\right\}$ é um ideal maximal de $\mathcal{O}$ e diz-se que cada elemento de o é um *infinitesimal* de ${}^*\mathbb{R}$. Verifica-se que $\mathcal{O}$ e o são sub-reticulados vetoriais de ${}^*\mathbb{R}$. item Prova-se que existe um único morfismo de domínios de integridade ordenados, $\mathrm{st} : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$, que satisfaz as seguintes condições: $\ker(\mathrm{st}) = o$ e, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{st}({}^*\lambda) = \lambda$.[13] Note que st é um epimorfismo, o qual é comumente chamado de o *morfismo parte standard*. Em virtude da segunda condição satisfeita por ele, e das estruturas naturais de corpo e de espaço vetorial real para ${}^*\mathbb{R}$, tem-se que tal epimorfismo é um funcional linear definido em $\mathcal{O}$.

Sigamos apresentando um lema simples sobre extensões de funcionais lineares dominados:

[11] Isto é, um espaço vetorial real munido de uma ordem parcial que é preservada por translação e por multiplicação por escalar não negativo e segundo a qual todo par de vetores desse espaço tem supremo (e, consequentemente, tem ínfimo). Para cada $n \in \mathbb{N}\ \ \{0\}$, um exemplo simples é o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ munido de sua ordem lexicográfica. Exemplos clássicos e não triviais são os chamados *espaços* L_p e *espaços* $C(K)$ munidos da ordem que é dada pela relação de dominação entre funções reais.

[12] Pelo fato de $\mathbb{R}$ ser arquimediano e por ${}^*(\cdot)$ preservar a sua estrutura de corpo ordenado.

[13] Explicitamente, basta tomar, para todo $x \in \mathcal{O}$, $\mathrm{st}(x) := \sup\{\alpha \in \mathbb{R} : {}^*\alpha \ {}^*\leqslant x\}$.

Lema 4.2 (Banach [2]). *Sejam X um espaço vetorial real, Y um subespaço vetorial de X, $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear tais que $\varphi \leqslant p$. Então, para todo $x \in X$, existe um funcional linear $\widetilde{\varphi} : Y + \mathbb{R} \cdot x \to \mathbb{R}$ tal que $\widetilde{\varphi} \restriction Y = \varphi$ e $\widetilde{\varphi} \leqslant p$.* [14]

Cientes deste lema e da observação vista anteriormente, passemos agora à prova do seguinte teorema:

Teorema 4.3 (Łoś–Ryll-Nardzewski [11], [10], Luxemburg [13], **ZF**). ***UT*** *implica* ***HB***.

Demonstração. Sejam X um espaço vetorial real, Y um subespaço vetorial de X, $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear tais que $\varphi \leqslant p$. Sendo assim, considere o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Y := \{f : f \text{ é um funcional linear definido em um} \\ \text{subespaço vetorial de } X, Y \subseteq \operatorname{dom}(f), \\ f \restriction Y = \varphi \text{ e } f \leqslant p\}.\end{aligned}$$

Note que $\mathcal{F}_Y$ é não vazio, pois $\varphi \in \mathcal{F}_Y$. Considere também, para cada $x \in X$, o conjunto $\mathcal{F}_Y(x) := \{f \in \mathcal{F}_Y : x \in \operatorname{dom}(f)\}$. Considere então a família não vazia $\widetilde{\mathcal{F}_Y} := \{\mathcal{F}_Y(x) : x \in X\}$ de subconjuntos de $\mathcal{F}_Y$. Usando o Lema 4.2, é fácil verificar que, para todo subconjunto finito e não vazio F de X, $\bigcap\limits_{x \in F} \mathcal{F}_Y(x) \neq \emptyset$, o que nos diz que $\widetilde{\mathcal{F}_Y}$ tem a PIF. Agora, suponha que **UT** valha. Pela Proposição 2.8, pode-se então fixar um ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathcal{F}_Y$ que contém $\widetilde{\mathcal{F}_Y}$. Fixe um $\alpha \in \mathbb{R}$ qualquer. Para cada $x \in X$, considere a função F_x de $\mathcal{F}_Y$ em $\mathbb{R}$ tal que, para todo $f \in \mathcal{F}_Y$,

$$F_x(f) := \begin{cases} f(x), & \text{se } f \in \mathcal{F}_Y(x); \\ \alpha, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Afirmamos que:

(0) Para quaisquer $x, y \in X$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\left\{f \in \mathcal{F}_Y : F_{x+\lambda \cdot y}(f) = \left(F_x + \lambda \cdot F_y\right)(f)\right\} \in \mathcal{U}.$$

De fato: suponha, por absurdo, que possamos fixar um par $x_0, y_0 \in X$ e um $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tais que não é verdade que $\left\{f \in \mathcal{F}_Y : F_{x_0+\lambda_0 \cdot y_0}(f) = \left(F_{x_0} + \lambda_0 \cdot F_{y_0}\right)(f)\right\} \in \mathcal{U}$. Assim, tem-se que $\left\{f \in \mathcal{F}_Y : F_{x_0+\lambda_0 \cdot y_0}(f) = F_{x_0}(f) + \lambda_0 \cdot F_{y_0}(f)\right\} \notin \mathcal{U}$. Usando que $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre $\mathcal{F}_Y$ que contém $\widetilde{\mathcal{F}_Y}$, conclui-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_Y(x_0) \cap \mathcal{F}_Y(y_0) \cap (\mathcal{F}_Y \;\; \{f \in \mathcal{F}_Y : \\ F_{x_0+\lambda_0 \cdot y_0}(f) = F_{x_0}(f) + \lambda_0 \cdot F_{y_0}(f)\}) \in \mathcal{U}\end{aligned}$$

(cf. Definição 2.1 (i)(2) e (ii)), i.e.,

$$\begin{aligned}\{f \in \mathcal{F}_Y(x_0) \cap \mathcal{F}_Y(y_0) : \\ F_{x_0+\lambda_0 \cdot y_0}(f) \neq F_{x_0}(f) + \lambda_0 \cdot F_{y_0}(f)\} \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Como o domínio de um elemento qualquer de $\mathcal{F}_Y$ é um subespaço vetorial de X, tem-se que $\mathcal{F}_Y(x_0) \cap \mathcal{F}_Y(y_0) \subseteq \mathcal{F}_Y(x_0 + \lambda_0 \cdot y_0)$, o que implica que

$$\begin{aligned}\{f \in \mathcal{F}_Y(x_0) \cap \mathcal{F}_Y(y_0) : \\ f(x_0 + \lambda_0 \cdot y_0) \neq f(x_0) + \lambda_0 \cdot f(y_0)\} \in \mathcal{U}.\end{aligned}$$

Mas qualquer elemento de $\mathcal{F}_Y$ é um operador linear. Logo,

$$\begin{aligned}\{f \in \mathcal{F}_Y(x_0) \cap \mathcal{F}_Y(y_0) : \\ f(x_0 + \lambda_0 \cdot y_0) \neq f(x_0) + \lambda_0 \cdot f(y_0)\} = \emptyset,\end{aligned}$$

uma contradição (com a Definição 2.1 (i)(1)). $\square$

A partir daqui, usaremos a Observação 4.1: seja ${}^*\mathbb{R}$ o corpo dos hiperreais com respeito a $\mathcal{U}$. Considere então $\Psi : X \to {}^*\mathbb{R}$ definida pondo, para todo $x \in X$, $\Psi(x) := [F_x]_{\mathcal{U}}$. É claro que Ψ está bem definida, por construção. Em virtude de (0) e da estrutura natural de espaço vetorial real para ${}^*\mathbb{R}$, é imediato concluir que, para quaisquer $x, y \in X$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$[F_{x+\lambda \cdot y}]_{\mathcal{U}} = [F_x + \lambda \cdot F_y]_{\mathcal{U}} = [F_x]_{\mathcal{U}} + \lambda \cdot [F_y]_{\mathcal{U}},$$

i.e., Ψ é linear sobre $\mathbb{R}$. Como $\mathcal{F}_Y \in \mathcal{U}$ e qualquer elemento de $\mathcal{F}_Y$ é uma extensão de φ, também é imediato concluir que:

(1) Para todo $x \in Y$, $\Psi(x) = {}^*(\varphi(x))$.

[14] Explicitamente, se $x \in Y$, basta tomar $\widetilde{\varphi} := \varphi$ e, se $x \in X \;\; Y$, pode-se tomar, para todo $y \in Y$ e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\widetilde{\varphi}(y+\lambda \cdot x) := \varphi(y)+\lambda \cdot \alpha_x$, em que

$$\alpha_x := \frac{1}{2}\left(\inf\{p(z+x) - \varphi(z) : z \in Y\} + \sup\{\varphi(z) - p(z-x) : z \in Y\}\right).$$

Note que, por ser uma definição explícita, não foi necessário usar princípio de escolha algum.

Além disso, tem-se que:

(2) Para todo $x \in X$, $\Psi(x) \ {}^*\!\leqslant {}^*(p(x))$.

Com efeito: suponha, por absurdo, que possamos fixar um $x_0 \in X$ tal que não é verdade que $\Psi(x_0) \ {}^*\!\leqslant {}^*(p(x_0))$. Sendo assim, segue da definição de $\Psi(x_0)$ e de ${}^*(p(x_0))$ que não é verdade que $[F_{x_0}]_{\mathcal{U}} \ {}^*\!\leqslant [C_{p(x_0)}]_{\mathcal{U}}$. Pela definição de ${}^*\!\leqslant$, tem-se então que $\left\{f \in \mathcal{F}_Y : F_{x_0}(f) \leqslant C_{p(x_0)}(f)\right\} \notin \mathcal{U}$. Usando que $\mathcal{U}$ é um ultrafiltro sobre $\mathcal{F}_Y$ que contém $\widetilde{\mathcal{F}_Y}$, conclui-se que

$$\mathcal{F}_Y(x_0) \cap \left(\mathcal{F}_Y \quad \left\{f \in \mathcal{F}_Y : F_{x_0}(f) \leqslant C_{p(x_0)}(f)\right\}\right) \in \mathcal{U},$$

i.e., $\left\{f \in \mathcal{F}_Y(x_0) : C_{p(x_0)}(f) < F_{x_0}(f)\right\} \in \mathcal{U}$. Então, segue da definição de $\mathcal{F}_Y(x_0)$ e de $C_{p(x_0)}$ que $\{f \in \mathcal{F}_Y(x_0) : p(x_0) < f(x_0)\} \in \mathcal{U}$. Mas qualquer elemento de $\mathcal{F}_Y$ é dominado por p. Logo, $\{f \in \mathcal{F}_Y(x_0) : p(x_0) < f(x_0)\} = \emptyset$, uma contradição. Agora, usando (2) e a linearidade de Ψ sobre $\mathbb{R}$, é fácil concluir que:

(3) Para todo $x \in X$, $|\Psi(x)| \ {}^*\!\leqslant \max\{{}^*(p(-x)), {}^*(p(x))\}$.

Usando (3), que $\mathbb{R}$ é arquimediano e que ${}^*(\cdot)$ preserva a ordem, também é fácil concluir que, para todo $x \in X$, $\Psi(x)$ é um elemento finito de ${}^*\mathbb{R}$. Então, tem-se que Ψ é, na verdade, um operador linear de X no domínio de integridade $\mathcal{O}$ dos elementos finitos de ${}^*\mathbb{R}$. Sendo st o morfismo parte standard de $\mathcal{O}$ em $\mathbb{R}$, pode-se então considerar o funcional linear $\psi := \mathrm{st} \circ \Psi : X \to \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathcal{O} \arrow[r, hook, "\subseteq"] \arrow[d, two heads, "\mathrm{st}"] & {}^*\mathbb{R} \\
Y \arrow[u, hook, "\subseteq"] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathbb{R} \arrow[ur, hook, "{}^*(\cdot)"'] &
\end{tikzcd}$$

Diagrama 2: Extensão de Hahn–Banach.

Finalmente, lembre-se que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{st}({}^*\lambda) = \lambda$, e que st preserva a ordem. Portanto, conclui-se de (1) e (2), respectivamente, que $\psi \upharpoonright Y = \varphi$ e que $\psi \leqslant p$.

5 Comentando sobre algumas equivalências e alguns resultados de consistência e independência

Encerramos o presente artigo com comentários sobre alguns resultados que relacionam os seguintes princípios (em ordem alfabética de siglas):

- **(AC) Axioma da Escolha.** Toda família de conjuntos não vazios possui uma função escolha.
- **(AL) Teorema de Banach–Alaoglu.** Seja X um espaço vetorial normado real ou complexo. Então, o espaço topológico $\langle B_{X^*}, w^* \rangle$ é de Hausdorff e compacto.
- **(BPI) Teorema do Ideal Booleano Primo.** Toda álgebra de Boole possui um ideal primo.
- **(BTP) Paradoxo de Banach–Tarski.** Toda bola fechada do espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ possui uma decomposição paradoxal com respeito ao grupo das isometrias deste espaço.[15]
- **(HB) Teorema da Extensão de Hahn–Banach.** Sejam X um espaço vetorial real, Y um subespaço vetorial de X, $p : X \to \mathbb{R}$ um funcional sublinear e $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ um funcional linear tais que $\varphi \leqslant p$. Então, existe um funcional linear $\psi : X \to \mathbb{R}$ tal que $\psi \upharpoonright Y = \varphi$ e $\psi \leqslant p$.
- **(KM) Teorema de Krein–Milman.** Em qualquer espaço vetorial topológico de Hausdorff e localmente convexo, todo compacto não vazio e convexo tem um ponto extremo.
- **(UT) Teorema do Ultrafiltro.** Sobre um conjunto não vazio, todo filtro está contido em algum ultrafiltro.

[15] Por cortesia ao leitor, diremos precisamente qual é o significado desta conclusão: dado um $A \subseteq \mathbb{R}^3$, uma *decomposição paradoxal* de A com respeito ao grupo G_3 das isometrias do $\mathbb{R}^3$ (ou, simplesmente, uma *decomposição G_3-paradoxal*) é uma partição $\{A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m\}$ de A, com $n, m \in \mathbb{N}$, para a qual existe um subconjunto $\{\phi_1, \ldots, \phi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$ de G_3 tal que

$$\phi_1[A_1] \cup \cdots \cup \phi_n[A_n] = A = \psi_1[B_1] \cup \cdots \cup \psi_m[B_m].$$

Intuitivamente falando, esta definição nos diz que o conjunto A pode ser decomposto em $n + m$ pedaços que, por meio de certos movimentos rígidos, podem ser rearranjados de maneira que tanto os n primeiros quanto os m últimos pedaços formem um conjunto *congruente* a A (v. [[27], p. 4]).

(**ZL**) **Lema de Kuratowski–Zorn.** Todo conjunto não vazio e parcialmente ordenado em que toda cadeia é limitada superiormente tem um elemento maximal.

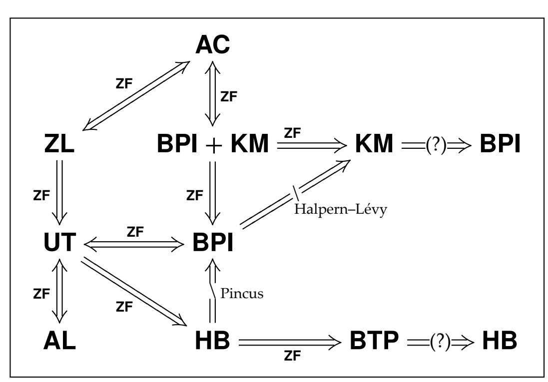
Antes de continuarmos, ressaltemos que o nosso objetivo com esta seção é somente comentar sobre algumas das relações entre os princípios enunciados acima. O leitor interessado em mais detalhes sobre aqueles enunciados que desconhecia poderá facilmente encontrá-los em nossas referências. Cientes disso, sigamos com o nosso propósito:

- Em **ZF**, prova-se que **UT**, **BPI** e **AL** são equivalentes entre si. A equivalência entre **BPI** e **AL** em **ZF** foi estabelecida originalmente por H. Rubin e D. S. Scott e anunciada por eles em [[21]] sem apresentar uma prova. No entanto, em [[22]] mostra-se uma prova, em **ZF**, de que **BPI** é equivalente a **UT**. Tanto em [[12]] quanto em [[22]], prova-se, em **ZF**, que **AL** implica **UT**. Devido ao Teorema 4.3, tem-se então que **AL** implica **HB** em **ZF**.

- É bem sabido que **AC** é *independente* de **ZF**.[16] Em **ZF**, prova-se que **AC** e **ZL** são equivalentes (veja uma prova em [[20]] e [[23]], por exemplo) e que **ZL** implica **UT** (veja uma prova em [[4]], por exemplo). Logo, **UT** é consistente com **ZF**. Em [[18]], D. Pincus demonstrou que **HB** + ¬ **BPI** (a negação de **BPI**) é consistente com **ZF**. Consequentemente, tem-se que **HB** não implica **AL** em **ZF** e que **AL** é *independente* de **ZF**.[17]

- Foi demonstrado por R. M. Solovay que a asserção "todo subconjunto de $\mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável" é consistente com **ZF**.[18] Conforme [[27], p. 207], prova-se que a existência da medida da Lebesgue universal em $\mathbb{R}$ implica a existência da medida de Lebesgue universal em $\mathbb{R}^3$. Usando a aditividade da medida e que a medida de Lebesgue é preservada por isometrias, conclui-se que uma decomposição G_3-paradoxal de um subconjunto de $\mathbb{R}^3$ de medida positiva (como a bola fechada unitária, por exemplo) não pode ser constituída apenas de conjuntos que são Lebesgue-mensuráveis. Então, tem-se que **BTP** implica a existência de conjuntos não mensuráveis a Lebesgue em $\mathbb{R}^3$ e, portanto, em $\mathbb{R}$. Em [[16]], J. Pawlikowski demonstrou que **HB** implica **BTP** em **ZF**. Logo, ¬ **BTP** e ¬ **HB** são consistentes com **ZF**. Consequentemente, tem-se que **BTP** e **HB** são independentes de **ZF**. Ainda não sabemos se **BTP** implica ou não **HB** em **ZF**.

- Em [[3]], J. L. Bell e D. H. Fremlin demonstraram que **BPI** + **KM** implica **AC** em **ZF**. Como **ZL** implica **KM** (veja uma prova em [[7]] e [[14]], por exemplo) e implica **BPI**, tem-se que **BPI** + **KM** é, na verdade, equivalente a **AC** em **ZF**. Devido ao resultado de J. D. Halpern e A. Lévy, que é o título de [[9]], tem-se também que, em **ZF**, **BPI** não implica **KM** nem **AL** implica **AC**. Ainda não sabemos se **KM** implica ou não **BPI** em **ZF**. Se **KM** implicar **BPI**, pode-se concluir que **KM** e **AC** são equivalentes em **ZF**. Por fim, é interessante destacar que o principal resultado de [[3]] é que, em **ZF**, **AC** é equivalente à seguinte consequência de **BPI** + **KM**: "a bola fechada unitária do dual topológico de um espaço normado real tem um ponto extremo".



16 Ou seja, não é possível provar nem refutar **AC** a partir dos axiomas de **ZF** se assumirmos que **ZF** é consistente. Este resultado foi estabelecido por P. J. Cohen no início da década de 1960. Para demonstrá-lo, Cohen utilizou o seu famoso método de *forcing*, que ele descreveu detalhadamente em [[6]].

17 Isto é, tal princípio e a sua negação são consistentes com **ZF**.

18 É interessante ressaltar que, na demonstração publicada por Solovay, é assumida a consistência da existência de um *cardinal inacessível* (v. [[24]]). No entanto, G. H. Moore cita um resultado não publicado de Solovay de que a consistência de **ZF** já é suficiente para demonstrar a de **ZF** + "todo subconjunto de $\mathbb{R}$ é Lebesgue-mensurável" (v. [[15], p. 304]).

Diagrama 3: Equivalências, implicações e não implicações conhecidas e desconhecidas pelos autores.

Agradecimentos

Os autores deste artigo gostariam de agradecer ao parecerista anônimo e ao Prof. Severino Toscano Melo por contribuírem para o aprimoramento deste trabalho através de seus comentários e sugestões.

Referências

[1] Alaoglu, L. Weak topologies of normed linear spaces, *Annals of Mathematics*, sec. ser., v. 41, n. 1, p. 252-267, 1940.

[2] Banach, S. Sur les fonctionnelles linéaires II, *Studia Mathematica*, v. 1, p. 223-239, 1929.

[3] Bell, J. L.; Fremlin, D. H. A geometric form of the axiom of choice, *Fundamenta Mathematicae*, v. 77, n. 2, p. 167-170, 1972.

[4] Bell, J. L.; Slomson, A. B. *Models and Ultraproducts: an introduction*. Mineola: Dover Publications, 2006. 336p. (Dover Books on Mathematics)

[5] Buskes, G. The Hahn-Banach Theorem surveyed, *Dissertationes Mathematicae*, v. 327, 1993.

[6] Cohen, P. J. *Set Theory and the Continuum Hypothesis*. New York: W. A. Benjamin, 1966. 192p.

[7] Conway, J. B. *A Course in Functional Analysis*. 2nd. ed. New York: Springer, 1990. 400p. (Graduate Texts in Mathematics, 96)

[8] Engelking, R. *General Topology*. rev. compl. ed. Berlin: Heldermann, 1989. 529p. (Sigma Series in Pure Mathematics, 6)

[9] Halpern, J. D.; Lévy, A. The Boolean prime ideal theorem does not imply the axiom of choice. In: Scott, D. S.; Jech, T. J. (Eds.). *Axiomatic Set Theory*. Providence: AMS, 1971. p. 83-134. (Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 13, part 1)

[10] Łoś, J.; Ryll-Nardzewski, C. Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras, *Fundamenta Mathematicae*, v. 41, p. 49-56, 1954.

[11] Łoś, J.; Ryll-Nardzewski, C. On the application of Tychonoff's Theorem in mathematical proofs, *Fundamenta Mathematicae*, v. 38, p. 233-237, 1951.

[12] Luxemburg, W. A. J. Reduced powers of the real number system and equivalents of the Hahn-Banach extension theorem. In: Luxemburg, W. A. J. (Ed.). *Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1969. p. 123-137 (Proceedings of the International Symposium on the Applications of Model Theory to Algebra, Analysis and Probability)

[13] Luxemburg, W. A. J. Two applications of the method of construction by ultrapowers to analysis, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 68, n. 4, p. 416-419, 1962.

[14] Megginson, R. E. *An Introduction to Banach Space Theory*. New York: Springer, 1998. 596p. (Graduate Texts in Mathematics, 183)

[15] Moore, G. H. *Zermelo's Axiom of Choice: its origins, development, and influence*. New York: Springer, 1982. 410p. (Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, 8)

[16] Pawlikowski, J. The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox, *Fundamenta Mathematicae*, v. 138, n. 1, p. 21-22, 1991.

[17] Pedersen, G. K. *Analysis Now*, rev. print. New York: Springer, 1989. 280p. (Graduate Texts in Mathematics, 118)

[18] Pincus, D. The strength of the Hahn-Banach theorem. In: Hurd, A.; Loeb, P. (Eds.). *Victoria Symposium on Nonstandard Analysis: University of Victoria 1972*. New York: Springer, 1974. p. 203-248 (Lecture Notes in Mathematics, 369)

[19] Robinson, A. Non-standard analysis, *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, ser. A, v. 64, p. 432-440, 1961.

[20] Rubin, H.; Rubin, J. E. *Equivalents of the Axiom of Choice, II*. Amsterdam: North-Holland, 1985. 321p. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, 116)

[21] Rubin, H.; Scott, D. S. *Some topological theorems equivalent to the Boolean prime ideal theorem*, preliminary report. In: GREEN, J. W. The May meeting in Yosemite, *Bulletin of the American Mathematical Society*, v. 60, n. 4, p. 389, 1954.

[22] Schechter, E. *Handbook of Analysis and its Foundations*. New York: Academic Press, 1996. 883p.

[23] Silva, S.G.; Jesus, J. P. C. Cem anos do Axioma da Escolha: boa ordenação, Lema de Zorn e o Teorema de Tychonoff, *Matemática Universitária*, n. 42, p. 16-34, jun. 2007.

[24] Solovay, R. M. A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, *Annals of Mathematics*, sec. ser., v. 92, no. 1, p. 1-56., 1970.

[25] Stroyan, K. D.; Luxemburg, W. A. J. *Introduction to the Theory of Infinitesimals*. New York: Academic Press, 1976. 326p. (Pure and Applied Mathematics, A Series of Monographs and Textbooks, 72)

[26] Tarski, A. Une contribution à la théorie de la mesure, *Fundamenta Mathematicae*, v. 15, n. 1, p. 42-50, 1930.

[27] Wagon, S. *The Banach-Tarski Paradox*. New York: Cambridge University Press, 1993. 253p. (Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 24)

[28] Willard, S. *General Topology*. Mineola: Dover Publications, 2004. 384p. (Dover Books on Mathematics)

João Paulo Cirineu de Jesus
Rogério Augusto dos Santos Fajardo
Instituto de Matemática e Estatística da USP
jpcirin@ime.usp.br
fajardo@ime.usp.br
http://www.ime.usp.br/~fajardo