

COREOGRAFIA DOS CORPOS CELESTES

Marcelo Marchesin

Lucas de Oliveira Prates

Leonardo Saud Maia Leite

UFMG

1 Um pouco de história

O desejo de poder descrever o movimento dos astros vem desde a antiguidade, quando povos como os babilônios, os gregos e os egípcios observavam o movimento dos corpos celestes para confeccionar calendários que ajudassem no planejamento da agricultura. É impressionante como, através dessas observações, essas civilizações obtiveram resultados importantes; por exemplo, a estimativa do raio da Terra, a descrição do movimento de rotação, a previsão de eclipses e de equinócios etc.

Grandes nomes da astronomia da antiguidade, como Ptolomeu e Hiparco, e da astronomia moderna, como Copérnico, Tycho Brahe, Kepler e Galileu, obtiveram diversas medições referentes aos movimentos da Lua e de vários planetas com boa precisão. Tais medições viriam a ser utilizadas por Newton para desenvolver suas três leis.

É amplamente aceito hoje em dia que o nascimento da Mecânica Celeste como ciência se dá com o lançamento da obra *Principia*, em 1686, por Sir Isaac Newton [8]. Nela, Newton formula suas três leis da dinâmica e a Lei da Gravitação Universal. Após a sua publicação, começam as tentativas de descrever a dinâmica dos corpos celestes apenas com o uso destas equações.

Leonhard Euler é o primeiro a considerar a atração mútua dos planetas do sistema solar. Ele formulou um problema cujo objetivo era determinar a posição de um

sistema com N partículas restritas à força de atração gravitacional entre elas, o que viria depois a se tornar o consagrado “Problema dos N -corpos”.

Para se determinar a posição de cada corpo em um instante t , é necessário resolver um sistema de segunda ordem com $3N$ equações diferenciais não lineares. O caso $N = 2$ foi completamente resolvido por Newton, que, além de calcular as soluções analiticamente, conseguiu, através delas, provar as três leis de Kepler. O problema para $N \geq 3$ é extremamente difícil e ainda está em aberto em sua formulação mais geral.

No sistema solar, o cálculo da órbita de um determinado planeta pode ser visto, de maneira aproximada, como um problema de apenas dois corpos: o planeta em questão e o Sol. Isto se dá pois, como a massa do Sol constitui aproximadamente 99,98% da massa de todo o sistema solar, as massas dos outros planetas são desprezíveis em relação à massa do sistema binário sob estudo e, portanto, em uma primeira aproximação, os demais planetas não influenciam na interação do sistema Sol-planeta.

No final do século XIX, a Mecânica Celeste havia se tornado tão intrigante e desafiadora que, em 1887, na comemoração de seu aniversário de 60 anos, o rei da Suécia e Noruega, Oscar II, estabeleceu um prêmio para quem conseguisse resolver o seguinte problema:

“Dado um sistema de corpos pontuais com massas positivas e arbitrárias que se atraem mutuamente segundo a lei de Newton, sob o pressuposto de que dois corpos nunca colidam, encontre uma representação das coordenadas de cada corpo como uma série de uma variável que seja uma função conhecida do tempo e que convirja uniformemente para todos os valores do domínio da função.”

Apesar de não ter resolvido completamente o pro-

blema, Poincaré foi o vencedor do prêmio. A publicação de seu trabalho sobre o assunto inaugurou uma nova era na Mecânica Celeste e introduziu ideias importantes para a análise qualitativa das soluções de sistemas de equações diferenciais. Dentre essas ideias estava o germe da Teoria do Caos. Poincaré ainda demonstrou que as séries utilizadas no cálculo das órbitas eram divergentes. Elas só funcionavam a curto prazo e, dado um tempo suficientemente grande, não era possível garantir a estabilidade do sistema planetário.

O movimento de um sistema de N -corpos sob a atração gravitacional mútua tem fascinado matemáticos e astrônomos há muito tempo. Muito se tem estudado sobre a mecânica celeste desde o seu nascimento com Newton. Os métodos e as técnicas utilizadas nesse estudo impulsionaram o desenvolvimento de diversas outras áreas da Matemática, como Análise Numérica, Teoria dos Sistemas Dinâmicos, Teoria de Perturbações, Métodos Quantitativos e Qualitativos das Equações Diferenciais, Topologia, Probabilidade, Geometria Diferencial, Geometria Algébrica, entre outros.

2 Sistemas de equações diferenciais ordinárias

Observamos que uma equação diferencial de ordem m sempre pode ser escrita como um sistema de equações de primeira ordem. Sendo assim, consideremos o sistema de primeira ordem dado abaixo acrescido de uma hipótese, a saber, o valor da função solução no instante inicial $t = t_0$. Somos levados ao seguinte problema, conhecido como problema de valor inicial (ou problema de Cauchy):

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, e $y_0 \in \mathbb{R}^n$.

2.1 Soluções de equilíbrio

Definição 2.1. Dizemos que uma função $y : (t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável é uma solução do problema de valor inicial dado por (2.1) se $y'(t) = f(t, y(t))$ para todo $-\epsilon < t < \epsilon$, ainda, $y(t_0) = y_0$.

No caso particular em que a função f em (2.1) não depende explicitamente da variável t , o sistema é chamado de autônomo e se torna

$$\begin{cases} y'(t) = f(y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Em um sistema autônomo, um ponto $y_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado de um ponto de equilíbrio da primeira equação em (2.2) se $f(y_0) = 0$. Para esses sistemas, os pontos de equilíbrio definem as soluções constantes. Isto fica claro se observarmos que a função constante dada por $y(t) \equiv y_0$ torna nulo os dois membros da primeira equação (2.2). Tais soluções recebem várias denominações como por exemplo “soluções estacionárias”, “soluções de equilíbrio”, “soluções constantes” etc.

2.2 Teorema da existência e da unicidade de soluções

Já sabemos o que é um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO's para encurtar), sabemos o que é uma solução deste sistema, sabemos o que é uma solução de equilíbrio mas ainda não sabemos efetivamente como resolver um dado sistema de EDO's. Em geral, resolver um tal sistema é um problema muito difícil de ser realizado matematicamente de forma analítica, ou seja sem a utilização de métodos numéricos que se valham da utilização de computadores (e que, por isso, nos fornecem “apenas” – como se isso fosse pouca coisa! – boas aproximações da verdadeira solução). Na verdade, excetuando-se as equações diferenciais estudadas nos cursos de graduação de Cálculo, raríssimos são os exemplos provenientes de problemas do dia-a-dia cujas soluções analíticas sejam conhecidas.

O que se pode fazer então? A primeira questão a ser analisada é decidir se o sistema de EDO's em questão tem solução. Respondida esta pergunta, outra aparece naturalmente: se um sistema de EDO's tem solução, como garantir que tal solução seja única?

Tais perguntas são fundamentais, pois imagine você tendo que resolver um sistema de equações que nos possibilitará mandar uma nave tripulada a Marte. Se tal sistema não tem solução, seria bom sabermos isso *a priori*.

De mesma forma, se existem várias soluções, é fundamental saber qual delas atende melhor aos nossos propósitos: qual é a mais barata? Qual é a mais rápida? etc...

Para tentar elucidar nossas questões sobre as soluções de um sistema de EDO's, apresentamos agora o teorema fundamental de existência e unicidade, que nos fornece condições necessárias e suficientes para que um determinado sistema de EDO's tenha solução única (pelo menos nas proximidades de um ponto dado). De acordo com nossos propósitos neste texto, apresentaremos apenas a versão do teorema para o caso autômomo.

Definição 2.2. Uma função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com Ω aberto, é uma função de Lipschitz em $B \subset \Omega$ se existe uma constante real K tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$, $\forall x, y \in B$.

Teorema 2.1 (Existência e Unicidade - Teorema de Cauchy-Picard). Considere um função $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, com Ω aberto. Seja $y_0 \in \Omega$ e suponha que f seja de Lipschitz com constante K na bola fechada $B = B_b[y_0]$. Seja $M \in \mathbb{R}$ uma constante satisfazendo $\|f(y)\| < M$, $\forall y \in B$. Então o sistema

$$\begin{cases} y'(t) = f(y), & \text{com } y \in \Omega, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

tem solução única em $I_\delta = (-\delta + t_0, t_0 + \delta)$, em que

$$0 < \delta < \min\left\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\right\}.$$

A demonstração desse teorema foge aos objetivos desta exposição, mas ela pode facilmente ser encontrada em qualquer livro especializado sobre o assunto, veja por exemplo Sotomayor [15].

3 O problema dos N-corpos

3.1 Formulação do problema

O problema central da Mecânica Celeste, o cultuado "Problema dos N-Corpos", tem envolvido grandes matemáticos desde o desenvolvimento das Leis de Newton, quando começou a ser pensado na formulação atual. Apesar de ser relativamente simples enunciá-lo, sua resolução continua desconhecida. O Problema

dos N-Corpos consiste em descrever o movimento de N massas pontuais positivas (chamadas genericamente de corpos) sobre as quais agem exclusivamente as forças de atração gravitacional mútuas.

Para enunciá-lo matematicamente, recorremos à Segunda Lei de Newton, que afirma que a força resultante, \vec{F}_{res} , que age sobre um corpo de massa m é igual à variação de seu momento linear, $\vec{p} = m\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{F}_{res} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (3.1)$$

Usamos, também, a Lei da Gravitação Universal, que nos diz que a força de atração que um corpo de massa m_j exerce sobre o corpo de massa m_i é descrita por

$$\vec{F}_{ij} = \frac{Gm_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\|\vec{r}_j - \vec{r}_i\|^3}, \quad (3.2)$$

onde $r_i(t) = (x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ é o vetor posição do i -ésimo corpo, ou seja, $r_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma função vetorial que nos fornece a posição em função da variável t e, seguindo a notação histórica dos astrônomos, denotaremos $\frac{dr_i}{dt}$ por $\dot{r}_i(t)$ e $\frac{d^2r_i}{dt^2}$ por $\ddot{r}_i(t)$.

Assim, como existem $(N - 1)$ corpos atraindo o corpo de massa m_i obtemos que a força resultante sobre este corpo é a soma das forças de atração de todos os demais $(N - 1)$ corpos e o sistema se escreve da seguinte forma:

$$\ddot{r}_i(t) = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{m_j(r_j(t) - r_i(t))}{\|r_j(t) - r_i(t)\|^3}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (3.3)$$

onde, para simplificar o problema e sem perda de generalidade, consideramos $G = 1$. Para isto basta considerarmos uma reparametrização do tempo: $t \rightarrow \sqrt{G}t$.

De forma ainda mais concisa, podemos escrever:

$$m_i \ddot{r}_i = \frac{\partial U}{\partial r_i}, \quad (3.4)$$

onde $U : \mathbb{R}^{3N} \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia potencial gravitacional dada por

$$U = \sum_{1 \leq i < j}^N \frac{m_i m_j}{\|r_j - r_i\|}. \quad (3.5)$$

Este sistema de equações, contudo, é de difícil resolução, pois, além do grande número de equações, é um sistema não linear.

3.2 Soluções de equilíbrio no problema de N-corpos

Como já vimos anteriormente, as soluções de equilíbrio são as soluções mais simples que podem existir, pois são soluções constantes. Além de sua simplicidade, as soluções de equilíbrio se revelam de grande importância por sua influência no comportamento de soluções próximas a elas. Assim sendo, ao abordarmos qualquer problema envolvendo EDO's, a primeira pergunta a se fazer é se tal sistema admite soluções de equilíbrio. Para respondermos a esta pergunta no que concerne ao problema dos N -corpos, primeiramente precisamos escrevê-lo no formato de um sistema de EDO's de primeira ordem como dado por (2.2). Para este fim consideremos

$$X(t) = (r_1(t), r_2(t), \dots, r_N(t)) \in \mathbb{R}^{3N}.$$

e definamos um novo conjunto de variáveis da seguinte forma: $v_i(t) = \dot{r}_i(t)$, $i = 1, \dots, N$. Assim, o sistema (3.3) de segunda ordem com $3N$ equações, se torna um sistema de primeira ordem com $6N$ equações, que pode ser escrito como

$$\dot{y} = f(y), \quad (3.6)$$

com $y = (r_1, \dots, r_N, v_1, \dots, v_N)$ e

$$f(y) = \left(v_1, v_2, \dots, v_N, \frac{1}{m_1} \frac{\partial U}{\partial r_1}, \frac{1}{m_2} \frac{\partial U}{\partial r_2}, \dots, \frac{1}{m_N} \frac{\partial U}{\partial r_N} \right),$$

onde $\frac{\partial U}{\partial r_N}$ é dado pelo segundo membro da equação (3.3). Assim, para obtermos uma solução de equilíbrio \bar{y} do problema dos N -corpos necessariamente devemos ter $f(\bar{y}) = 0$, o que implica em

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.7)$$

O que torna o problema dos N -corpos ainda mais interessante é que ele não possui soluções de equilíbrio. Fisicamente é fácil perceber por que isto ocorre: como temos uma quantidade finita de corpos, considere aquele (ou um daqueles) cuja distância ao centro de massa do sistema todo é o maior possível. É possível traçar um plano passando por este corpo que divide o espaço em dois semi-espacos, um dos quais contém todos os demais ($N - 1$) corpos. Desta forma a força resultante agindo sobre o corpo localizado neste plano

tem a direção do interior do semi-espaco que contém os outros corpos e, portanto, tal corpo é atraído nesta direção pelos demais. Sendo assim, ele não pode permanecer em repouso durante qualquer intervalo de tempo e, portanto, não pode haver solução estacionária para este corpo. Logo, não existe solução estacionária para o sistema como um todo.

Contudo, como somos matemáticos, nós queremos apresentar uma demonstração analítica de tal resultado. Para isto precisamos do **Teorema de Euler para Funções Homogêneas**. Antes, porém, precisamos definir o que vem a ser uma função homogênea de grau k .

Definição 3.1. Uma função $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, é dita ser positivamente homogênea de grau $k \in \mathbb{Z}$ se

$$g(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^k g(x_1, x_2, \dots, x_m), \quad \forall t > 0.$$

A partir disso, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1 (Funções homogêneas). Se g é uma função homogênea de grau k , então

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x_i} x_i = kg.$$

Demonstração. Por hipótese, temos $g(tx_1, tx_2, \dots, tx_m) = t^k g(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Denotemos $tx_i = y_i$ e assim, derivando os dois membros desta equação, obtemos

$$\begin{aligned} kt^{k-1} g(x_1, x_2, \dots, x_m) &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial g(y_1, y_2, \dots, y_m)}{\partial y_i} x_i. \end{aligned}$$

Como a expressão acima é válida para todo $t > 0$, então, tomando $t = 1$, obtemos o resultado desejado. \square

Com o auxílio deste teorema, mostraremos, agora, que o problema dos N -corpos não possui solução de equilíbrio. Suponhamos, por absurdo, o contrário. Note que, para $t > 0$,

$$U(tr_1, tr_2, \dots, tr_m) = \sum_{1 \leq i < j} \frac{m_i m_j}{|tr_j - tr_i|} = t^{-1} U$$

Logo, U é homogênea de grau $k = -1$ e, pelo Teorema de Euler, segue que

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial U}{\partial r_i} \cdot r_i = -U.$$

O primeiro membro é zero por (3.7) e o segundo membro é estritamente negativo. Geramos, então, uma contradição, que vem do fato de termos suposto que existiria uma solução de equilíbrio.

Assim, acabamos de mostrar que as soluções mais simples possíveis para uma EDO, as de equilíbrio, simplesmente não existem para o problema dos N -corpos. Somos então levados diretamente à seguinte pergunta: será que existe algum tipo de solução?

3.3 Existência de soluções locais

Apesar de não conhecermos a solução para o Problema dos N -corpos explicitamente, mostraremos que ela existe (pelo menos, em caráter local) e é única.

Temos que salientar que o resultado a seguir é fundamental para aqueles que querem trabalhar na área de Mecânica Celeste. Claramente a sua negativa inviabilizaria esta como uma área séria de pesquisa em Matemática. Apesar de sua importância cabal, não é muito comum se encontrar este resultado demonstrado, quer seja em livros básicos quer seja em livros mais técnicos. A justificativa para tal fato se dá pela incrível simplicidade da sua demonstração como consequência imediata do Teorema da Existência e Unicidade, como veremos abaixo. Talvez por isso, não seja difícil encontrar demonstrações mais elaboradas porém equivocadas da existência de soluções locais para o problema de N -corpos.

Teorema 3.2 (Existência e unicidade local de soluções para o problema dos N -corpos). *Dadas N massas positivas pontuais m_1, m_2, \dots, m_N , o problema dos N -corpos, dado pelo sistema abaixo, possui única solução local.*

$$\begin{aligned} \dot{r}_1 &= v_1 \\ &\vdots \\ \dot{r}_N &= v_N \\ \dot{v}_1 &= \nabla_{r_1} U(x) \\ &\vdots \\ \dot{v}_N &= \nabla_{r_N} U(x), \end{aligned} \tag{3.8}$$

$y_0 = (r_1(t_0), \dots, r_N(t_0), v_1(t_0), \dots, v_N(t_0)) \in \mathbb{D} = (\mathbb{R}^{3N}/\Delta) \times \mathbb{R}^{3N}$; em que denotamos por Δ o conjunto de

colisões, ou seja

$$\Delta = \{(r_1, \dots, r_N) \in \mathbb{R}^{3N} ; r_i = r_j \text{ para } i \neq j\}.$$

Demonstração. Basta observar que a escolha do aberto de definição global do problema, \mathbb{D} , exclui justamente os pontos singulares de $f(y) = (f_1(y), \dots, f_{2N}(y))$. Portanto as funções coordenadas, $f_k(y)$, $k = 1, \dots, 2N$, são analíticas em \mathbb{D} e o Teorema de Picard pode ser aplicado de forma imediata para garantir a existência e unicidade local das soluções. \square

Observação. Note que no Teorema de Picard, como o encontramos enunciado em [15], a hipótese de que $f(y)$ seja localmente Lipschitziana acarreta em sua continuidade e, portanto, em sua limitação em uma vizinhança compacta da condição inicial. Portanto, a consideração sobre $\|f(y)\| < M$ não se trata de uma hipótese a ser verificada, mas sim de uma consequência da hipótese de ser Lipschitziana, que é realçada no enunciado do teorema devido à importância da constante M na determinação do intervalo de definição da solução local.

Outro teorema também de grande importância, principalmente quando se estuda o problema de singularidades e colisões, é o que enunciaremos a seguir. Ele determina sob que condições podemos garantir a analiticidade das soluções. Sua demonstração pode ser encontrada em detalhes em [10] e não a incluiremos aqui. Por outro lado, mostraremos que o problema dos N -corpos satisfaz as hipóteses deste teorema e, portanto, poderemos concluir que as soluções locais garantidas pelo Teorema de Picard para o problema dos N -corpos, são, de fato, soluções analíticas.

Teorema 3.3. *Consideremos um sistema de equações diferenciais autônomo de primeira ordem dado por*

$$\dot{y}_k = f_k(y), \quad k = 1, \dots, m, \tag{3.9}$$

onde as f_k , $k = 1, \dots, m$ são funções analíticas e limitadas em valor absoluto por M na bola aberta $|y_k - \xi_k| < r$, $k = 1, \dots, m$. Então, na vizinhança complexa de t_0 dada por

$$|t - t_0| < \frac{r}{(m + 1)M},$$

a solução $y_k(t)$ de (3.9) determinada pelas condições iniciais $y_k(t_0) = \xi_k, k = 1, \dots, m$, é uma função analítica de t e ainda satisfaz a condição

$$|y_k(t) - \xi_k| < r \quad k = 1, \dots, m.$$

Observação. O fato de o enunciado tratar de valores complexos para t não afeta o nosso problema, pois o resultado pode ser restrito ao caso de t real.

Teorema 3.4. *O problema dos N -corpos possui solução local analítica.*

Demonstração. A demonstração segue da verificação das hipóteses do teorema anterior. Como já vimos, o problema dos N -corpos escrito como o sistema (4.1) se encontra no formato do sistema (3.9) onde as funções $f_k, k = 1, \dots, 2N$, são dadas pelo lado direito do sistema (4.1) e são claramente analíticas. Basta então que verifiquemos, que estas f_k 's são limitadas. Mas isto é uma consequência imediata da analiticidade das mesmas no conjunto aberto definido como sendo o complementar do conjunto de colisões. Dada uma posição inicial neste aberto existe uma bola fechada centrada nessa condição inicial e totalmente contida neste aberto. Assim as funções $f_k, k = 1, \dots, 2N$, são limitadas nessa bola fechada e claramente também são limitadas em qualquer bola aberta que seja um subconjunto da bola fechada sob consideração. \square

4 Soluções globais do problema dos N -corpos

Na busca de soluções dos problemas matemáticos, nós procuramos inicialmente as soluções mais simples possíveis. Como o problema dos N -corpos não possui soluções de equilíbrio, passamos a procurar quais seriam as soluções, não estacionárias, mais simples do problema dos N -corpos. A ideia é a seguinte: visto que não existem soluções estacionárias no sistema referencial de coordenadas onde as equações são descritas, poderia haver soluções estacionárias em um sistema de coordenadas que girasse com velocidade angular constante em

torno do centro de massa do próprio sistema? Essa ideia aparece naturalmente se considerarmos que nós testemunhamos diariamente a realização desta solução aparente no sistema Sol-Terra pois, para todos os efeitos práticos, a Terra gira em torno do Sol, que permanece aparentemente parado. Há de se observar que a massa do Sol corresponde a 99,98% da massa de todo o sistema solar e, devido à sua dimensão, o ponto que define o centro de massa do sistema Sol-Terra fica localizado dentro do próprio Sol, bem próximo ao seu centro.

4.1 Soluções homotéticas

Seguindo a linha de raciocínio descrita anteriormente, vamos nos perguntar se existem soluções planares do problema dos N -corpos onde todos os corpos envolvidos descrevem retas passando pela origem em que o movimento mantenha a mesma configuração ao longo do tempo, ou seja, as razões entre os tamanhos dos vetores diretores de cada par de corpos se mantenha constante. Estas soluções são chamadas de *soluções homotéticas*. Assim, se cada vetor diretor em um instante inicial fosse dado por $\mathbf{a}_i = (x_i, y_i, z_i)$, procuramos soluções dadas por $r_i(t) = \phi(t)\mathbf{a}_i$, com \mathbf{a}_i vetores constantes e $\phi(t)$ função positiva real. Substituindo essa expressão na equação (3.3), obtemos

$$|\phi|^3 \phi^{-1} \ddot{\phi} \mathbf{a}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i|^3}, \quad \forall i = 1, \dots, N. \quad (4.1)$$

Observe que o segundo membro da equação acima não varia com t , portanto o mesmo deve ocorrer com o primeiro membro. Então deve existir constante λ tal que

$$\ddot{\phi} = -\frac{\lambda \phi}{|\phi|^3}. \quad (4.2)$$

Mostraremos mais à frente que $\lambda > 0$ (veja equação (4.7)). Coincidentemente (ou não) a equação acima é a mesma que encontramos quando estudamos o problema de 2-corpos sobre uma reta, também conhecido como Problema de Kepler unidimensional. Várias soluções desta equação são conhecidas, por exemplo: $\phi(t) = \alpha t^{2/3}$, com $\alpha^3 = 9\lambda/2$. Observe que tais soluções apresentam um pequeno problema quando $t \rightarrow 0$; nesse

caso teríamos $\phi(t) = 0$, ou seja, teríamos a colisão total quando $t = 0$, ou dizendo de outra forma, tal solução é uma solução de ejeção. Aqui não vamos nos aprofundar muito nesse assunto, bastando dizer que o estudo das colisões tem seu papel dentro do problema dos N -corpos e, além disso, está diretamente ligado às configurações centrais que serão estudadas na próxima seção.

Observe ainda que, ao introduzirmos λ na expressão acima, automaticamente, em decorrência de (4.1), somos levados a um outro sistema de equações envolvendo a mesma constante λ , ou seja,

$$-\lambda \mathbf{a}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i}{|\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i|^3}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.3)$$

Observe também que o sistema de equações acima não envolve mais a função ϕ e tampouco qualquer de suas derivadas e, por isso, é chamada de sistema algébrico. Deixemos momentaneamente de lado as equações obtidas acima para repetirmos o nosso raciocínio em um outro caso bem parecido com este.

4.2 Soluções homográficas

Agora nós nos perguntamos se seria possível existirem soluções planares do problema dos N -corpos em que todos os corpos envolvidos descrevessem movimentos circulares uniformes em torno da origem do sistema de coordenadas. Ou seja, uma pessoa posicionada na origem e girando com a mesma velocidade angular que o sistema veria todos os corpos parados. Assim, se cada vetor diretor em um instante inicial fosse dado por $\zeta_j = (x_j, y_j)$, procuramos soluções dadas por: $r_j(t) = \phi(t)\zeta_j$ com $\zeta_j = x_j + iy_j$ constantes complexas e $\phi(t)$ função complexa, pois a multiplicação por um número complexo rotaciona e dilata (ou contrai) o sistema. Assim, substituindo essa expressão na equação (3.3), obtemos:

$$|\phi|^3 \phi^{-1} \ddot{\phi} \zeta_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{|\zeta_j - \zeta_i|^3}.$$

Novamente observe que o segundo membro da equação acima não varia com t . Portanto, o mesmo deve

ocorrer com o primeiro membro. Então existe λ tal que

$$\ddot{\phi} = -\frac{\lambda \phi}{|\phi|^3}. \quad (4.4)$$

Agora, diferentemente do caso anterior, nós temos as equações de um problema de 2-corpos no plano. Também conhecido como Problema de Kepler bidimensional. As soluções desse problema são todas conhecidas desde Newton e descrevem cônicas que podem ser hiperbóles, parábolas, elipses ou circunferências (as duas últimas no caso periódico) ou até mesmo retas, no caso degenerado.

Novamente observe que, ao denotarmos por λ a expressão acima, automaticamente somos levados a um outro sistema de equações algébricas envolvendo a mesma constante λ , ou seja,

$$-\lambda \zeta_i = \sum_{j=1, j \neq i}^N m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{|\zeta_j - \zeta_i|^3}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.5)$$

O sistema acima tem exatamente a mesma forma que o sistema (4.3), a única diferença é o espaço onde vivem tais equações. Resumindo, em (4.3) temos $a_j \in \mathbb{R}^3$ e $\phi(t)$ solução unidimensional do Problema de Kepler, o que levou às soluções homotéticas. Em (4.5) temos $\zeta_j \in \mathbb{C}$ e $\phi(t)$ é solução planar do problema de Kepler, o que definiremos por **soluções homográficas**, pois aos pontos ζ_j 's são atribuídos movimentos Keplerianos. Se ϕ em (4.4) representa um movimento circular então temos o que chamaremos de **equilíbrio relativo**. Isto motiva a seguinte definição:

Definição 4.1 (Configurações centrais). *Escolhidas N massas pontuais positivas: m_1, m_2, \dots, m_N , chamamos de uma configuração central planar a um conjunto de N posições no plano: $\zeta_i = (x_i, y_i)$, com $i = 1, \dots, N$ e uma constante positiva λ satisfazendo (4.5).*

Explicitando-se o potencial utilizado, obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta_i} + \lambda m_i \zeta_i = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

Observemos que a constante λ não pode ser escolhida arbitrariamente. Introduzamos o momento de Inércia:

$$I = \sum_{j=1}^N m_j |\zeta_j|^2,$$

Multiplicando-se a equação (4.6) por ζ_j , somando-se em j e usando o teorema de Euler para funções homogêneas, obtemos

$$\lambda = \frac{U}{I} > 0. \quad (4.7)$$

A equação acima nos diz duas coisas importantes: λ é positivo e $\frac{U}{I}$ é constante. O resultado que vem a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em vários livros sobre o assunto, (ver [13], por exemplo) nos diz que \sqrt{I} e U^{-1} estão, de uma certa forma relacionados ao “tamanho” da configuração central. Enquanto \sqrt{I} é uma estimativa da separação máxima entre os corpos, U^{-1} representa uma estimativa de separação mínima. Analise o teorema abaixo:

Teorema 4.1. *Existem constantes positivas A , B , C e D que dependem somente das massas dos corpos, tais que*

$$A\sqrt{I} \leq R \leq B\sqrt{I}$$

e

$$CU^{-1} \leq r \leq DU^{-1},$$

onde $r = r_{min}$ e $R = R_{max}$ são respectivamente o mínimo e o máximo das distâncias mútuas entre os N corpos.

Agora, substituindo (4.7) em (4.6) e multiplicando por $2UI$, obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j}(U^2I) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Vamos agora parametrizar as configurações centrais pelas distâncias mútuas: $r_{jk} = \|\zeta_j - \zeta_k\|$. Introduzimos a massa total

$$M = \sum_{j=1}^N m_j.$$

Como o centro de massa está fixo na origem, temos

$$MI - 0 = \left(\sum_{j=1}^N m_j \right) \left(\sum_{j=1}^N m_j \zeta_j^2 \right) - \left(\sum_{j=1}^N m_j \zeta_j \right)^2,$$

de onde segue que

$$MI = \sum_{j < k} m_j m_k |\zeta_j - \zeta_k|^2.$$

Dessa forma, nós acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 4.2. *Considere N massas pontuais positivas: m_1, m_2, \dots, m_N e sejam ζ_1, \dots, ζ_N em \mathbb{R}^{2N} , N pontos distintos. Uma condição necessária e suficiente para que ζ seja uma configuração central é que*

$$\frac{\partial}{\partial \zeta_j}(U^2I) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

em que a função potencial e o momento de inércia são dados, respectivamente, por

$$U(\zeta) = G \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{m_j m_k}{r_{jk}}, \quad r_{ij} = |r_i - r_j|$$

e

$$I(\zeta) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N m_j m_k r_{jk}^2, \quad M = \sum_{j=1}^N m_j.$$

Em 1912, Karl Sundman (ver [12]) descobriu uma propriedade interessante sobre o problema dos 3-corpos. Ele mostrou que se os três corpos colidem simultaneamente então eles devem, necessariamente, tender à uma configuração central. Em outras palavras, antes de colidir, os corpos se aproximam arbitrariamente de uma configuração equilátera ou colinear do tipo das soluções de Lagrange ou de Euler, respectivamente. Essa propriedade também foi mostrada no caso dos N -corpos no sentido de que se um subconjunto com k ($k \leq N$) corpos experimenta uma colisão simultânea, então esses k corpos tendem a uma configuração central de k corpos. Infelizmente, como não sabemos se o conjunto de configurações centrais tem ou não a cardinalidade do contínuo, nós ainda não sabemos se uma órbita de colisão tende a uma configuração central específica ou fica tendendo alternadamente a várias delas sem de fato, tender a alguma em especial.

Além do mais, Donald Saari ([3]) provou que uma grande classe de soluções do problema dos N -corpos que se espalha ao infinito, o faz tendendo a uma configuração central à medida que os corpos se afastam. Mais especificamente se três corpos se espalham pelo espaço se afastando arbitrariamente uns dos outros, então (não estando eles em uma mesma reta) quanto mais eles se afastam, mais eles se aproximam dos vértices de um triângulo equilátero. Esse resultado é bastante impor-

tante quando se quer estudar o problema cosmológico do movimento das galáxias.

4.3 Soluções de Euler-Lagrange

Teorema (Soluções de Lagrange — 1772). No problema dos 3-corpos, para quaisquer valores positivos das 3 massas, existem exatamente 5 (classes de) configurações centrais: 3 destas são colineares (soluções de Euler). Nas outras duas, os 3 corpos estão no vértice de um triângulo equilátero (soluções de Lagrange).

Os equilíbrios colineares de Euler serão denotados por $L1$, $L2$ e $L3$ e os equilíbrios equiláteros de Lagrange serão denotados por $L4$ e $L5$. Esses pontos estão ilustrados na Figura 1.

Demonstração. A demonstração se dará em 3 passos:

1. Mostraremos que uma configuração central de 3 corpos que não seja colinear, necessariamente é um triângulo equilátero.
2. Mostraremos que existem configurações centrais que são triângulos equiláteros.
3. Mostraremos que existem configurações centrais colineares.

PASSO 1: Consideremos que o centro de massa está fixado na origem, ou seja,

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 = 0. \quad (4.8)$$

Suponhamos que temos uma configuração central planar de 3 corpos não colineares e que r_1 , r_2 e r_3 representem os respectivos vetores posição de cada corpo. Utilizando a notação de números complexos temos:

$$r_j = r_{jx} + ir_{jy}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Das equações (4.5) temos:

$$-\lambda r_3 = \frac{m_1(r_1 - r_3)}{r_{13}^3} + \frac{m_2(r_2 - r_3)}{r_{23}^3}. \quad (4.9)$$

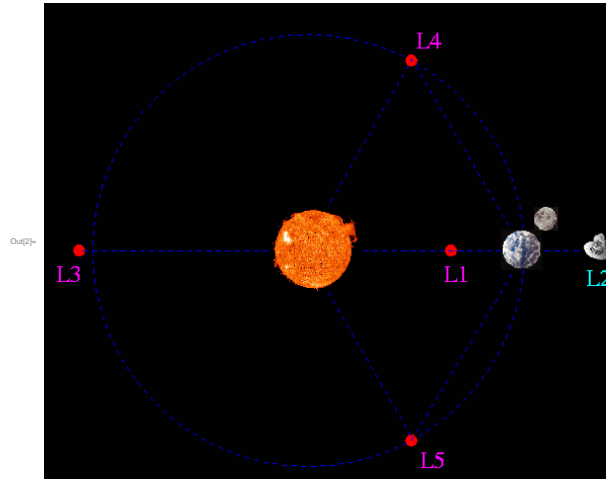


Figura 1: Soluções de equilíbrio relativo para o problema dos 3-corpos.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o corpo de massa m_3 se encontra sobre o eixo x . Assim, $r_{3y} = 0$ e a equação (4.9) nos fornece

$$0 = \frac{m_1 r_{1y}}{r_{13}^3} + \frac{m_2 r_{2y}}{r_{23}^3}, \quad (4.10)$$

e, substituindo a equação do centro de massa $m_2 r_{2y} = -m_1 r_{1y}$, temos

$$0 = m_1 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) r_{1y}. \quad (4.11)$$

Observe que $r_{1y} \neq 0$, pois, caso contrário, como estamos supondo que o centro de massa está fixo na origem, teríamos que $r_{2y} = 0$, e r_1 , r_2 e r_3 seriam colineares, contrariando a nossa hipótese inicial. Assim, concluímos que $r_{13} = r_{23}$. De forma análoga, poderíamos ter suposto que a massa m_1 se encontrava sobre o eixo x e repetindo o argumento acima, concluiríamos que $r_{21} = r_{31}$. Ou seja, uma configuração central que não é colinear necessariamente é um triângulo equilátero.

PASSO 2: Queremos mostrar que existe uma configuração central tal que $r_{12} = r_{13} = r_{23} = a$. Isto é, devemos mostrar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ constante positiva, tal que

$$-\lambda r_k = \frac{m_i(r_i - r_k)}{a^3} + \frac{m_j(r_j - r_k)}{a^3} \quad (4.12)$$

para cada $k = 1, 2, 3$, com $i, j \in \{1, 2, 3\}$ $i, j \neq k$. Somando-se e subtraindo-se $m_k r_k$ ao segundo membro

da equação (4.12), obtemos

$$a^{-3}(m_i r_i - m_i r_k + m_j r_j - m_j r_k) = a^{-3}[m_i r_i + m_j r_j + (m_k - M)r_k].$$

De (4.8), temos $m_i r_i + m_j r_j = -m_k r_k$ e, substituindo esta expressão na equação acima, obtemos

$$a^{-3}[-m_k r_k + (m_k - M)r_k] = -a^{-3}Mr_k. \quad (4.13)$$

Portanto, tomando-se $\lambda = a^{-3}M$, obtemos o resultado desejado.

PASSO 3: Consideremos o caso em que os três corpos são colineares, com a equação (4.8) válida. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que todos os corpos estão sobre o eixo x . Assim, $r_i = (x_i, 0)$, $\forall i = 1, 2, 3$. Suponhamos ainda que os corpos estejam ordenados da seguinte forma: $x_1 < x_2 < x_3$. Portanto existem σ e ρ números reais positivos satisfazendo $\rho + \sigma = 1$ de modo que

$$x_2 - x_1 = \rho a, \quad x_3 - x_1 = a, \quad x_3 - x_2 = \sigma a. \quad (4.14)$$

Assim, das equações (4.5), temos

$$\begin{aligned} -\lambda m_1 x_1 &= \frac{m_1 m_2}{(\rho a)^3} \rho a + \frac{m_1 m_3}{a^3} a, \\ -\lambda m_2 x_2 &= -\frac{m_1 m_2}{(\rho a)^3} \rho a + \frac{m_2 m_3}{(\sigma a)^3} \sigma a, \\ -\lambda m_3 x_3 &= -\frac{m_1 m_3}{a^3} a - \frac{m_2 m_3}{(\sigma a)^3} \sigma a, \end{aligned}$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} -\lambda x_1 a^2 &= m_2 \rho^{-2} + m_3, \\ -\lambda x_2 a^2 &= -m_1 \rho^{-2} + m_3 \sigma^{-2}, \\ \lambda x_3 a^2 &= m_1 + m_2 \sigma^{-2}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Como de (4.8) temos

$$Mx_1 + m_2 \rho a + m_3 a = 0$$

e

$$Mx_3 - m_1 a - m_2 \sigma a = 0,$$

então as equações acima e as equações em (4.15) implicam em

$$\lambda M^{-1} a^3 (m_2 \rho + m_3) = m_2 \rho^{-2} + m_3,$$

$$\lambda M^{-1} a^3 (m_2 \sigma + m_1) = m_2 \sigma^{-2} + m_1.$$

De onde segue que

$$\frac{m_2 \rho^{-2} + m_3}{m_2 \rho + m_3} = \frac{m_2 \sigma^{-2} + m_1}{m_2 \sigma + m_1} = \lambda M^{-1} a^3.$$

Agora, consideremos a função

$$f(\rho) = \frac{m_2 \rho^{-2} + m_3}{m_2 \rho + m_3} - \frac{m_2 \sigma^{-2} + m_1}{m_2 \sigma + m_1},$$

em que $\sigma = 1 - \rho$. Observe que, para todo $x > 0$,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{ax^{-2} + b}{ax + b} \right) = -\frac{a[3ax + b(x^3 + 2)]}{x^3(ax + b)^2} < 0.$$

Assim, se $a, b > 0$ e $0 < \rho < 1$, então $f'(\rho) < 0$. Além disso, vemos que $\lim_{\rho \rightarrow 0^+} f(\rho) = +\infty$ e $\lim_{\rho \rightarrow 1^-} f(\rho) = -\infty$. Portanto, existe um único $\rho^* \in (0, 1)$ satisfazendo $f(\rho^*) = 0$.

Escolhendo ρ^* tal que $f(\rho^*) = \lambda M^{-1} a^3$, temos que a primeira e a terceira equações em (4.15) são satisfeitas e a relação para o centro de massa mostra que a segunda equação também o é. Temos então uma configuração central, o que conclui o resultado. \square

4.4 Os asteroides Gregos e os Troianos

A Mecânica Celeste é uma área de pesquisa matemática que envolve um sistema não linear de equações diferenciais de resolução bastante complexa. Esse sistema modela problemas oriundos das observações astronômicas relacionadas ao movimento dos corpos celestes. Porém, devido à quantidade enorme de variáveis e parâmetros envolvidos, muitas simplificações têm que ser feitas para se escrever o problema dos N -corpos como um sistema de EDO's. Seria de se esperar, então, que os resultados obtidos matematicamente não previssem com exatidão fatos astronômicos reais. Contudo, em meados do século passado, observações astronômicas mostraram a existência de centenas de pequenos corpos celestes ocupando duas regiões do sistema solar em uma configuração bastante próxima àquela prevista pela solução triangular de Lagrange no sistema Sol-Júpiter. Tais agrupamentos de asteroides ficaram conhecidos como os asteroides Gregos e Troianos (ver Figura 2).

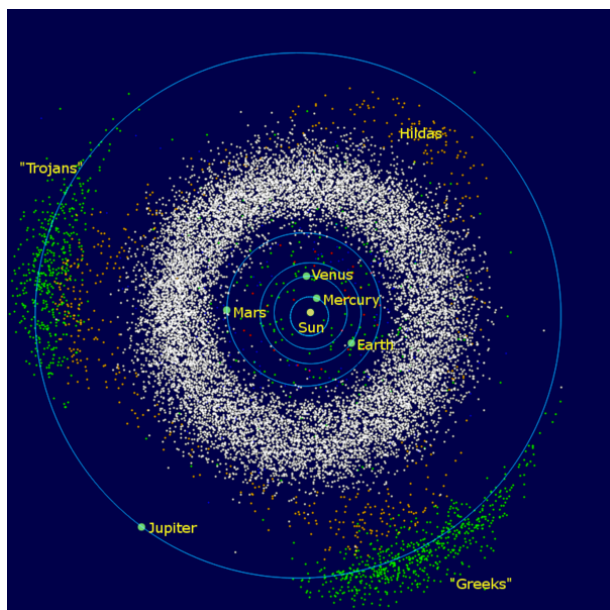


Figura 2: Asteroides Gregos e Troianos formando soluções de Lagrange com Júpiter e o Sol.

Depois disso, várias outras aplicações e curiosidades foram descobertas para os pontos de equilíbrio do triângulo equilátero de Lagrange ou mesmo para os equilíbrios colineares de Euler. Podemos citar algumas:

1. L4 e L5 são linearmente instáveis se a razão entre as massas é pelo menos 25 : 1.
2. Os asteroides Gregos e Troianos estão localizados em L4 e L5 do sistema Sol-Júpiter.
3. O sistema binário formado por Saturno e sua maior lua, Tethys, possui duas luas menores, Telesto e Calypso, em seus pontos L4 e L5.
4. Existem nuvens de poeira em L4 e L5 do sistema Sol-Terra (1950).
5. As nuvens de Kordylewski são grandes concentrações de poeira que podem existir (ou existiram) nos pontos Lagrangeanos L4 e L5 do sistema Terra-Lua. Elas foram observadas primeiramente pelo astrônomo polonês Kazimierz Kordylewski nos anos 1960, mas ainda há controvérsias se elas realmente existem devido a sua grande “palidez”. É possível

que elas sejam fenômenos transientes devido à instabilidade dos pontos L4 e L5 e às perturbações dos planetas internos.

6. A “Sociedade L5”, formada em 1975 para promover a formação de colônias espaciais nos pontos L4 ou L5 do sistema Terra-Lua. Da carta de fundação: “Nosso desejo a longo prazo é realizar uma reunião de nossa sociedade no ponto L5.”
7. Os pontos colineares de Euler são pontos do tipo sela-centro (dois autovalores imaginários puros e dois autovalores reais de sinais opostos).
8. Naves espaciais da NASA no ponto L1 do sistema Sol-Terra:
 - a) Advanced Composition Explorer (ACE)
 - b) Solar and Heliospheric Observatory (SOHO), WIND, Genesis (terminado)
 - c) International Sun/Earth Explorer 3 (ISEE-3) (terminado)
 - d) Deep Space Climate Observatory
9. Naves espaciais no ponto L2 do sistema Sol-Terra:
 - a) Sonda Wilkinson Microwave Anisotropy (WMAP) (NASA) (terminado)
 - b) Satelites Planck
 - c) Observatório Espacial Hershel (terminado)
10. Muito exemplos da Ficção Científica: Em “Jornadas nas estrelas: a nova geração”, no episódio “Os sobreviventes”, a nave Enterprise é surpreendida por uma nave inimiga que estava escondida estacionada em um ponto de equilíbrio.

4.5 Soluções coreográficas

Como vimos, apesar de podermos garantir a existência local de soluções do problema dos N -corpos, poucas são as soluções analíticas conhecidas. Os equilíbrios relativos são praticamente as únicas soluções conhecidas de forma analítica para o problema de N -corpos em sua forma mais geral. A busca de soluções,

mesmo que sejam soluções particulares, tem motivado pesquisadores ao longo dos anos e se mostrado bastante infrutífera. Recentemente, contudo, uma nova família de soluções foi descoberta. Apesar de sua existência ter sido mostrada por métodos indiretos e de não termos uma expressão analítica para elas, tais soluções surpreendem pela simplicidade e pela plasticidade. Reza a lenda que foi o professor espanhol Carles Simó quem batizou tal família de soluções de *soluções coreográficas*, ou simplesmente *coreografias*. A definição é a seguinte.

Definição 4.2. *Uma solução coreográfica do problema dos N -corpos é uma solução onde N massas percorrem, sem colisão, uma mesma curva com uma defasagem temporal fixa entre cada par de corpos consecutivos.*

Claro que as soluções de Lagrange (1772), que formam um triângulo equilátero, são um exemplo desse tipo de coreografia e foram, na verdade, os primeiros exemplos de soluções coreográficas a serem apresentadas. Também são exemplos de coreografias as soluções de equilíbrios relativos onde N massas iguais estão localizadas nos vértices de um N -ágono regular. Mas elas não são as únicas.

4.5.1 A configuração Figura 8 de Chenciner-Montgomery

Em 1993, C. Moore [11] garantiu a existência de uma solução coreográfica para o problema dos 3-corpos, em que a órbita descrevia uma figura semelhante ao número 8 (ver Figura 3). Moore baseou-se em investigações numéricas sobre a convergência do fluxo gradiente. A apresentação de tal exemplo gerou uma curiosidade muito grande entre os pesquisadores da área, que passaram a tentar provar a existência da tais soluções em forma de figura 8 sem a utilização de resultados numéricos.

Em 2000, Alain Chenciner, do Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Éphémérides (IMCCE-Paris) e Richard Montgomery, da Universidade da Califórnia Santa Cruz (UCSC) provaram, fazendo uso de argumentos variacionais, a existência da solução em forma

da figura 8 (ver [1]). Esta é a única solução coreográfica (não lagrangeana) cuja estabilidade foi demonstrada de forma analítica até o momento.

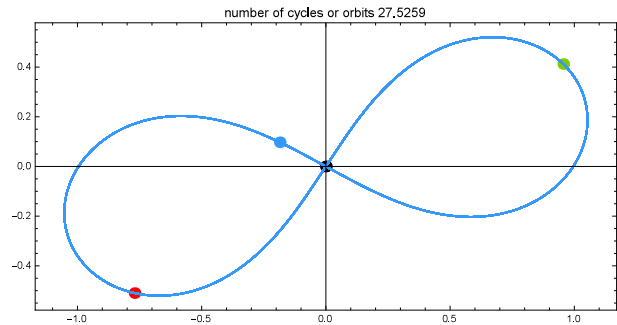


Figura 3: A solução Figura 8 de Chenciner-Montgomery.

4.6 Lissajous

Após a descoberta de Chenciner-Montgomery, muitos pesquisadores passaram a se perguntar se a solução em forma de figura 8 não seria um membro particular de uma família muito maior de soluções coreográficas. Entre esses pesquisadores estava Joseph Gerver, que percebeu a semelhança entre uma certa família de curvas conhecida nos meios matemáticos e a figura 8. Além disso, tais curvas generalizam as cônicas, o que faria muito sentido, visto que Newton já havia provado que as soluções do problema dos 2-corpos são sempre cônicas. Tal família de curvas ficou conhecida como “curvas de Lissajous” e a sua definição é a seguinte:

Definição 4.3. *As curvas de Lissajous formam uma família de curvas planas parametrizadas da seguinte forma:*

$$x(t) = A \sin(at + \delta), \quad y(t) = B \sin(bt).$$

Tais curvas descrevem um movimento no plano cujas projeções nos eixos são movimentos harmônicos simples e ganharam notoriedade quando foram estudadas por Jules Antoine Lissajous [7]. Como já dissemos, tal família engloba várias curvas conhecidas como; as retas ($a = b$ e $\delta = 0$), as elipses ($a = b$), as circunferências ($A = B$, $a = b$ e $\delta = \pi/2$), as parábolas ($a = 2b$, $\delta = \pi/2$) etc. Além disso, são curvas fechadas (periódicas) quando a/b é um número racional.

Gerver percebeu que a figura 8 é muito parecida à Lissajous de parâmetros $(2, 1)$. Assim, logo após assistir a palestra onde a existência da solução da figura 8 foi apresentada, Joseph Gerver apresentou uma conjectura surpreendente. Ele conjecturou que qualquer curva de Lissajous de parâmetros (k, ℓ) onde $k + \ell = N$ é o número de corpos envolvidos, seria topologicamente equivalente a uma solução coreográfica.

Uma semana depois, Gerver forneceu fortes evidências à sua conjectura no caso $(3, 1)$, apresentando uma solução, assistida por computador, do problema de 4-corpos que passou a ser conhecida como “super-oito” (ver Figura 4, embaixo). Pouco tempo depois, Chenciner, Gerver, Montgomery e Simó [2] estabeleceram, numericamente, a existência de uma vasta família de soluções coreográficas representadas por curvas de Lissajous. Contudo, para muitas dessas coreografias, ainda não há uma prova analítica de sua existência.

Além disso, Simó mostrou numericamente a existência de muitas coreografias surpreendentemente belas. Devido à plasticidade de tais órbitas e o seu inerente caráter dinâmico, recomendamos fortemente uma visita ao site: <http://www.soe.ucsc.edu/~charlie/3body/> para se ver as animações de tais órbitas.

Até o presente momento já são centenas as coreografias encontradas. Além disso, o número de coreografias “distintas” cresce rapidamente com N , a quantidade de corpos envolvidos no problema. O maior N estudado até agora é $N = 799$, com todas as massas descrevendo uma figura 8. Contudo, a existência de muitas destas soluções ainda carece de prova analítica. Além disso, outra questão importantíssima é sobre a estabilidade de tais soluções. Para ter algum interesse astronômico é fundamental que as soluções dos problemas de N -corpos encontradas matematicamente sejam estáveis, pois esta seria a única possibilidade real de podermos encontrar, por exemplo, um sistema tríplice de estrelas descrevendo uma órbita em forma de figura 8. Até o momento, somente a solução em forma de figura 8 é comprovadamente estável.

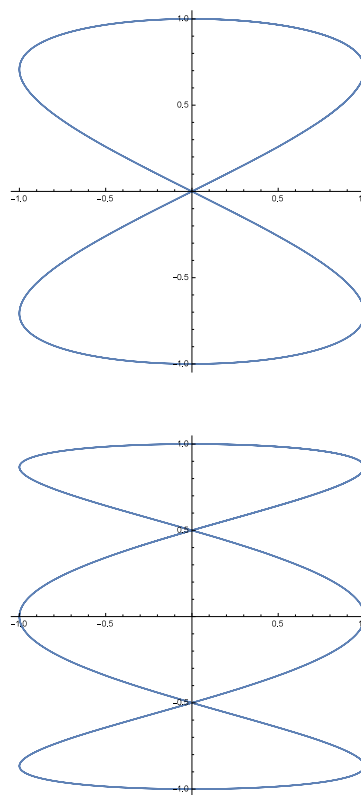


Figura 4: A Curva de Lissajous com parâmetros $(1,2)$ (em cima) e o Super 8 (embaixo).

Não se assuste portanto, se, um dia destes, as manchetes dos jornais noticiarem a descoberta de um sistema tríplice de estrelas descrevendo um órbita em forma de figura 8.

Finalizamos então este nosso artigo deixando a seguinte pergunta para instigar a sua curiosidade: se tal sistema tríplice tivesse um sistema planetário orbitando este “sistema de três sóis”, quais seriam as possíveis órbitas descritas pelos planetas que o compõem?

Referências

- [1] CHENCINER, A.; MONTGOMERY, R. A remarkable periodic solution of the three-body problem in the case of equal masses. *Annals of Mathematics*, **152**, 2000, p.881–901.
- [2] CHENCINER, A.; GERVER, J.; MONTGOMERY, R.; SIMÓ, C. Simple choreographic motions of N bodies: a preliminary study, *Geometry, Mechanics, and Dynamics*, 287-308. New York: Springer, 2002.

- [3] SAARI, D. G. The manifold structure for collision and for hyperbolic-parabolic orbits in the n -body problem. *Journal of Differential Equations*, v.55, 1984, p.300–329.
- [4] DIACU, F.; HOLMES, P. *The origins of Chaos and Stability*. Princeton Science Library, 1996.
- [5] GERVER, J. Private communication, 2000.
- [6] LAGRANGE, J. L. Essai sur le problème des trois corps. *Prix de l'Academie Royale des Sciences*, vol IX, 1772, p.229–332.
- [7] LISSAJOUS, A. J. Memoire sur l'étude optique des mouvements vibratoires (1857), reproduzido em H. B. Miller, *Acoustical Measurements* (Hutchinson Ross, 1982).
- [8] NEWTON, I. *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. S. Pepys, Royal Society Press, Londres, 1686.
- [9] SIMÓ, C. New families of solutions in the N-body problem. *Proceedings of the Third European Congress of Mathematics*. Birkhauser, 2001.
- [10] SIEGEL, C. I.; MOSER, J. K. *Lectures on Celestial Mechanics*. New York: Springer, 1971.
- [11] MOORE, C. Braids in the Classical Gravity. *Physical Review Letters*, v. 70, 1993, p. 3675–3679.
- [12] SUNDMAN, K. Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica*, v. 36, 1912, p.105–179.
- [13] VOLCHAN, S. B. *Uma Introdução à Mecânica Celeste*. 26º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA: Rio de Janeiro, 2007.
- [14] WINTNER, A. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton: Princeton University Press, 1941.
- [15] SOTOMAYOR, J. *Introdução às equações diferenciais ordinárias*. IMPA: Rio de Janeiro, 1979.
- [16] SZEBEHELY, V. *Theory of Orbits*. New York: Academic Press, 1967.