Um jogo que parece justo mas não é

Jessica Kubrusly

UFF

A Teoria da Probabilidade muitas vezes nos coloca em situações que desafiam a nossa intuição, e esse é um dos pontos que a torna tão fascinante. Neste artigo será apresentado um problema desse tipo, de enunciado simples, resposta não intuitiva e solução não trivial.

Regra do jogo: Considere um jogo composto pelas seguintes regras. Em uma urna existem 3 bolinhas idênticas: uma na cor branca, representada pela letra B; outra na cor preta, representada pela letra P; e a terceira na cor azul, representada pela letra A. Dois jogadores jogam um contra o outro. Cada um deles escolhe uma sequência de duas cores entre as cores das bolinhas da urna; essa sequência também é chamada de *aposta*. Por exemplo, cada jogador pode apostar em uma das seguintes sequências de duas cores: $PP, PB, AB, BP \ldots$ Depois das apostas feitas as bolinhas são retiradas da urna, sequencialmente e com reposição, até que saia uma das duas sequências escolhidas. Ganha o jogo o jogador que tiver escolhido a sequência que sair primeiro.

Por exemplo, se um jogador escolheu a sequência PP, seu adversário a sequência PB e as bolinhas retiradas da urna foram nas cores e na ordem P, A, A, B, P, B, então o jogador que apostou em PB é o vencedor, pois esta sequência saiu antes da PP.

Perguntas: Diante das regras definidas acima estamos interessados em responder as seguintes perguntas:

1. O jogo é justo? Isto é, independentemente da sequência de duas cores escolhida por cada jogador, a probabilidade de qualquer um ganhar é de 50%?

2. Caso a resposta acima seja negativa, qual a probabilidade de cada jogador ganhar?

Neste texto entende-se como "jogo justo" aquele em que cada jogador tem mesma probabilidade de ganhar, uma vez definida as apostas. Vale a pena destacar que em teoria dos jogos há diversas referências em que a expressão "jogo justo" tem outra conotação, veja [3].

Trabalhos anteriores

Problemas como este já foram apresentados e discutidos por alguns autores. Por exemplo, Schwarz [6] apresenta um problema semelhante em seu livro de problemas e desafios em Probabilidade e Estatística. Na versão de Schwarz, denominada "*Mean Waiting Time for 1-1 vs. 1-2*", em vez de bolinhas sorteadas de uma urna, um dado é lançado sequencialmente e a questão principal é encontrar o número médio de lançamentos até que saia a sequência $1-1$ e até que saia a sequência $1-2$. A solução mostra que o número médio de lançamentos é diferente para os dois casos, o que já nos faz desconfiar que talvez o jogo apresentado neste artigo não seja justo.

Outra discussão para esse problema foi feita por Saldanha [5]. Na versão de Saldanha o jogo consiste no lançamento de uma moeda e cada jogador escolhe uma sequência de tamanho três formada por "cara" ou "coroa", por exemplo, KKK, KCK, CCK, ..., onde K representa a face cara e C a face coroa. Em seu artigo, Saldanha utiliza resultados da teoria de Álgebra Linear para encontrar as probabilidades de cada jogador ganhar o jogo para cada par de apostas possíveis. A solução aqui apresentada para o problema das bolinhas é parecida com a de Saldanha, mas seu desenvolvimento difere em alguns pontos.

Esse problema também é usualmente apresentado em alguns livros de Processos Estocásticos, uma vez que ele pode ser interpretado como um problema de cadeia de Markov em tempo discreto. Por exemplo, problemas semelhantes são propostos como exercícios no livro de Taylor e Karlin [7].

Solução

O objetivo deste artigo é responder as perguntas apresentadas anteriormente. No final será apresentada a probabilidade de vitória de cada jogador supondo todos os possíveis pares de apostas, assim como fez Saldanha [5]. Para isso, os possíveis pares de apostas serão particionados em alguns casos e as contas serão feitas para cada um desses casos.

Antes da apresentação dos diferentes casos, veja na Tabela 1 todas as possibilidades de apostas. As linhas dessa tabela indicam as possibilidades de aposta do jogador 1, enquanto as colunas indicam as possibilidades de aposta do jogador 2. Como os dois jogadores não podem apostar na mesma sequência, as posições da diagonal principal estão preenchidas com "—". Qualquer outra posição, até então preenchida com "?", representa um possível par de apostas para o jogo.

O objetivo é preencher cada posição (i, j) da Tabela 1 com a probabilidade do jogador 1 ganhar o jogo, ou seja, com a probabilidade do jogador que fez a aposta indicada pela linha ganhar o jogo.

	BB	BP	BA	PB	PP	PA	AB	AP	AA
BB	?	?	?	?	?	?	?	?	?
BP	?	-	?	?	?	?	?	?	?
BA	?	?	-	?	?	?	?	?	?
PB	?	?	?	-	?	?	?	?	?
PP	?	?	?	?	-	?	?	?	?
PA	?	?	?	?	?	-	?	?	?
AB	?	?	?	?	?	?	-	?	?
AP	?	?	?	?	?	?	?	-	?
AA	?	?	?	?	?	?	?	?	-

Tabela 1: Possíveis pares de apostas entre o jogador 1 (linhas) e o jogador 2 (colunas). Cada interrogação será preenchida com a probabilidade de o jogador 1 ganhar a aposta.

Caso 1: Apostas BP e BA

Nesse primeiro caso considere que um jogador escolhe a sequência BP e o outro a sequência BA, apostas representadas pelas posições $(2, 3)$ e $(3, 2)$ da Tabela 1. Veja que, para esse caso, a cada retirada de uma nova bola o jogo se encontra em um dos quatro estados descritos a seguir.

- Estado 1: nada foi acumulado por nenhum dos jogadores;
- Estado 2: a última retirada foi B e ambos os jogadores conseguiram a primeira cor;
- Estado 3: as duas últimas retiradas foram BP e o jogo termina;
- Estado 4: as duas últimas retiradas foram BA e o jogo termina.

Veja também que a cada retirada de uma nova bolinha o jogo pode mudar de um estado para outro. A Figura 1 apresenta o diagrama com as probabilidades de transições entre os quatro estados, onde cada estado é representado por um círculo. Analisando esse diagrama é possível perceber que se o jogo se encontra no Estado 1 ele pode mudar para o Estado 2, no caso de sair uma bola branca, ou permanecer no Estado 1, no caso de sair uma bola preta ou azul. Por isso, a cada nova retirada de uma bola, a probabilidade de ir para o Estado 2 dado que ele estava no Estado 1 é de $1/3$ e a probabilidade de permanecer no Estado 1 é de $2/3$.

Também é possível perceber que uma vez no Estado 2 o jogo não retorna mais para o Estado 1. Se sair uma bola azul o jogo vai para o Estado 4 e o jogador que escolheu a sequência BA ganha. Se sair uma bola preta o jogo vai para o Estado 3 e o jogador que escolheu a sequência BP ganha. Já se sair uma bola branca o jogo permanece no Estado 2. Assim,

$$P(\text{ir para o Estado 2} \mid \text{está no Estado 2}) =$$
$$P(\text{ir para o Estado 3} \mid \text{está no Estado 2}) =$$
$$P(\text{ir para o Estado 4} \mid \text{está no Estado 2}) = \frac{1}{3}.$$

Veja também na Figura 1 que, chegando nos Estados 3 ou 4, não há transição para outro estado, uma vez que esses dois estados representam o fim do jogo. Por isso cada um desses estados possui uma seta para ele mesmo com probabilidade 1. Estes estados são chamados de absorventes.

A partir do diagrama apresentado na Figura 1 pode-se construir a matriz M tal que a posição (i, j) guarda a probabilidade de transição do Estado i para o Estado j com a retirada de uma bolinha,

$$M_{i,j} = P(\text{ir para o Estado } j \mid \text{está no Estado } i)\,,$$

ou seja,

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Essa matriz é conhecida como *matriz de transições*, veja Karlin [7] ou Ross [4].

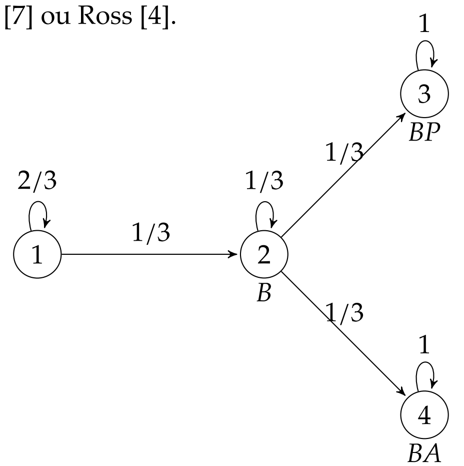

Figura 1: Diagrama de transições relativo ao Caso 1.

Matriz de transições

Antes de prosseguirmos com as contas para o Caso 1 vejamos alguns resultados gerais para matrizes de transições, que serão úteis neste e nos demais casos.

Definição 1. *Uma matriz M é chamada de matriz de transições se M é uma matriz quadrada, com todas as entradas não-negativas e a soma dos elementos em cada linha é igual a 1.*

Para o problema apresentado neste texto, temos um jogo que pode assumir N diferentes estados. Para o Caso 1 temos $N = 4$, mas a quantidade de estados varia em cada caso. Seja M a matriz definida de forma que, cada posição (i, j), representada por $M_{i,j}$, guarda a probabilidade de chegar no estado j com a retirada de uma bolinha, dado que o jogo está no estado i. A matriz M é uma matriz de transições $N \times N$.

Considere agora a matriz $M^{(n)}$ onde cada posição (i, j), representada por $M^{(n)}_{i,j}$, é a probabilidade chegar no estado j com a retirada de n bolinhas, dado que o jogo está no estado i. A matriz $M^{(n)}$ também é uma matriz de transições e, como mostrado em Ross [4],

$$M^{(n)} = M^n.$$

Então, se quisermos encontrar a probabilidade do jogo estar no Estado j depois de n bolinhas retiradas, considerando que ele começou no Estado 1 (estado inicial), basta encontrar $M^{(n)}_{1,j}$. Desta forma, a probabilidade do jogo terminar em um Estado j, considerando que ele começou no Estado 1, pode ser encontrada pelo limite

$$\lim_{n\to\infty} M^{(n)}_{1,j}.$$

Para encontrar esse valor é preciso saber a posição $(1, j)$ da matriz $\lim_{n\to\infty} M^{(n)}$, caso ela exista. Como $M^{(n)} = M^n$, vamos analisar a existência de $\lim_{n\to\infty} M^n$. Veremos que, para os casos abordados neste problema, esse limite sempre existe.

Proposição 2. *Seja M uma matriz de transições, isto é, M é uma matriz quadrada, com todas as entradas não-negativas e a soma dos elementos em cada linha é igual a 1. Então $\lambda = 1$ é um autovalor de M e todos os outros autovalores têm módulo menor do que 1.*

Demonstração. Primeiro veja que $\mathbb{1} = (1, 1, \ldots, 1)^T$ é autovetor de M associado ao autovalor 1, uma vez que a soma dos elementos em cada linha de M é 1.

Agora vamos mostrar que se λ é autovalor de M então $|\lambda| \leq 1$. Seja $N \times N$ a dimensão da matriz M. Vamos chamar de $p_{i,j}$ o elemento da posição (i, j) de M. Suponha λ autovalor de M associado ao autovetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)^T$, ou seja, $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Seja v_{max} o maior elemento, em módulo, do vetor $\mathbf{v}$, isto é, $|v_{max}| \geq |v_i|$, $\forall$ $i = 1, 2, \ldots, N$. Veja que $\lambda v_i = p_{i,1}v_1 + \ldots + p_{i,N}v_N = \sum_{j=1}^{N} p_{i,j}v_j$, produto entre a i-ésima linha da matriz M e $\mathbf{v}$. Logo, $|\lambda v_i| = \left|\sum_{j=1}^{N} p_{i,j}v_j\right| \leq \sum_{j=1}^{N} |p_{i,j}v_j| = \sum_{j=1}^{N} p_{i,j}|v_j|$ $\leq \sum_{j=1}^{N} p_{i,j}|v_{max}| = |v_{max}| \sum_{j=1}^{N} p_{i,j} = |v_{max}|$. Em particular vale para $v_i = v_{max}$, nesse caso $|\lambda v_{max}| = |\lambda||v_{max}| \leq |v_{max}| \Rightarrow |\lambda| \leq 1$. $\square$

Vejamos como a Proposição 2 pode garantir a existência de $\lim_{n\to\infty} M^n$, onde M é uma matriz de transições de um caso deste problema. Para mostrar a existência desse limite vamos primeiro mostrar que a matriz M é diagonalizável, considerando o corpo dos complexos. Para isso basta mostrar que M tem uma base de autovetores complexos. Isso não é verdade para qualquer matriz de transições, mas será verdade para as matrizes de transições apresentadas neste artigo. Em cada caso será mostrado a existência dessa base de autovetores.

Então, considerando M diagonalizável sob o corpo dos complexos, podemos escrever

$$M = PDP^{-1},$$

onde D é uma matriz diagonal, cujos elementos na diagonal principal são os autovalores da matriz M, e P é uma matriz cujas colunas são os autovetores de M, veja [1].

Assim, é possível afirmar que

$$\begin{array}{rcll} M & = & PDP^{-1} & \Rightarrow \\ M^n & = & \left(PDP^{-1}\right)^n & \Rightarrow \\ M^n & = & PD^nP^{-1} & \Rightarrow \\ \lim_{n\to\infty} M^n & = & \lim_{n\to\infty} PD^nP^{-1} & \Rightarrow \\ \lim_{n\to\infty} M^n & = & P\left(\lim_{n\to\infty} D^n\right)P^{-1} & . \end{array}$$

Como D é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores de M e, pela Proposição 2, se λ é autovalor de M então $|\lambda| \leq 1$, podemos afirmar que existe $\lim_{n\to\infty} D^n$. Esse limite será uma matriz diagonal cujos elementos na diagonal principal são 0 ou 1.

Então existe também $\lim_{n\to\infty} M^n$. Além disso, como M é uma matriz real, pode-se afirmar que M^n é uma matriz real para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e que $\lim_{n\to\infty} M^n$ também é matriz real, uma vez que o conjunto das matrizes reais é fechado no conjunto das matrizes complexas. Assim concluímos que existe $\lim_{n\to\infty} M^n$ e esta é uma matriz real.

Dessa forma, em cada caso, para encontrar a probabilidade do jogo terminar em cada estado precisamos encontrar os autovetores e autovalores de M e então calcular $P\left(\lim_{n\to\infty} D^n\right)P^{-1}$. Se for custoso encontrar as matrizes D e P, porém possível de mostrar que existe uma base de autovetores da matriz M, podemos calcular $\lim_{n\to\infty} M^n$ a partir de iterações computacionais, uma vez que sabemos que esse limite exite. Para isso basta calcular M^n para n cada vez maior até que a convergência seja observada.

Caso 1 - continuação

Logo, para calcular a probabilidade de vitória de cada jogador precisamos encontrar $\lim_{n\to\infty} M^n$, para M definida na Equação 1. As posições $(1,3)$ e $(1,4)$ dessa matriz limite guardam as probabilidades de vitória do jogador que apostou em BP e do jogador que apostou em BA, respectivamente.

Para calcular $\lim_{n\to\infty} M^n$ é preciso primeiro encontrar os autovalores e autovetores da matriz M. Os autovalores são: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2/3$ e $\lambda_3 = 1/3$, sendo o λ_1 com multiplicidade 2. Os autovetores associados à eles são: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1)^T$ e $\mathbf{v}_2 = (0,0,1,-1)^T$, associados à λ_1; $\mathbf{v}_3 = (1,0,0,0)^T$, associado à λ_2; e $\mathbf{v}_4 = (1,-1,0,0)^T$ associado à λ_3. Então existe uma base de autovetores e é possível escrever $M = PDP^{-1}$ e, consequentemente, $\lim_{n\to\infty} M^n = P\left(\lim_{n\to\infty} D^n\right)P^{-1}$.

Fazendo as contas chegamos na matriz

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Veja que tanto a posição $(1,3)$ quanto a posição $(1,4)$ dessa matriz são iguais a $1/2$, o que significa que para esse par de apostas o jogo é justo. Ou seja, se os jogadores escolherem as apostas BP e BA, a probabilidade de cada um ganhar é $1/2$.

	BB	BP	BA	PB	PP	PA	AB	AP	AA
BB	—	?	?	?	?	?	?	?	?
BP	?	—	$^1/_2$	?	?	?	?	?	?
BA	?	$^1/_2$	—	?	?	?	?	?	?
PB	?	?	?	—	?	$^1/_2$	?	?	?
PP	?	?	?	?	—	?	?	?	?
PA	?	?	?	$^1/_2$	?	—	?	?	?
AB	?	?	?	?	?	?	—	$^1/_2$	?
AP	?	?	?	?	?	?	$^1/_2$	—	?
AA	?	?	?	?	?	?	?	?	—

Tabela 2: Probabilidades para o Caso 1.

Veja que esse caso é análogo aos casos em que os dois jogadores escolhem a mesma primeira cor da sequência e a segunda cor diferente desta primeira. Esses casos são: BP e BA, PB e PA, AB e AP. Para todos esses casos o jogo será justo. Com isso, algumas posições da Tabela 1 já podem ser preenchidas, veja Tabela 2.

Caso 2: Apostas BB **e** AB

A conclusão de que o jogo é justo para o Caso 1 está diretamente ligada à matriz de transições M definida para este caso. Se a matriz de transições for outra, os resultados serão outros. Vejamos mais um caso.

No Caso 2, a suposição é a de que um jogador escolheu a aposta BB e o outro a aposta AB. Para esse par de apostas, a cada retirada de uma bolinha o jogo se encontra em um dos 5 estados descritos a seguir:

Estado 1: nada foi acumulado por nenhum dos jogadores;

Estado 2: a última retirada foi B e o jogador com a aposta BB conseguiu a primeira cor;

Estado 3: a última retirada foi A e o jogador com a aposta AB conseguiu a primeira cor;

Estado 4: as duas últimas retiradas foram BB e o jogo termina;

Estado 5: as duas últimas retiradas foram AB e o jogo termina.

Para esse caso o diagrama de transições entre os estados está apresentado na Figura 2 e a matriz de transições M é:

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Novamente a matriz M tem autovalor $\lambda_1 = 1$ com multiplicidade 2, como sempre vai acontecer para este problema. Os demais autovalores são 0 e $(1 \pm \sqrt{2})/3$. Veja que $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,1)^T$ e $\mathbf{v}_2 = (-1/3, 0, -2/3, 1, -1)^T$ são autovetores linearmente independentes associados a $\lambda_1 = 1$. Logo existe uma base de autovetores que, inclusive, é fácil de ser encontrada. Além dos dois autovetores já apresentados temos ainda os autovetores $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -1, 0, 0)^T$, $\mathbf{v}_4 = (-\sqrt{2}, 1, 1, 0, 0)^T$ e $\mathbf{v}_5 = (\sqrt{2}, 1, 1, 0, 0)^T$ associados a λ_2, λ_3 e λ_4, respectivamente.

Fazendo as contas podemos encontrar $\lim_{n\to\infty} M^n$ e, observando as entradas $(1,4)$ e $(1,5)$ dessa matriz limite, é possível concluir que, para essas apostas, o jogo não é justo. O jogador que escolher a sequência AB tem probabilidade $2/3$ de ganhar, enquanto seu adversário, que escolheu a sequência BB, tem probabilidade 1/3 de ganhar.

Veja que esse caso é análogo a todos os casos em que um jogador escolhe uma sequência com as duas bolinhas da mesma cor e o outro jogador escolhe uma sequência com duas bolinhas de cores diferentes, sendo a última da mesma cor das bolinhas de seu adversário. Esses casos são: BB e AB, BB e PB, PP e AP, PP e BP, AA e BA, AA e PA. Para todos esses casos o jogador que escolher a sequência com duas cores diferentes tem o dobro de probabilidade de ganhar. Com isso mais posições da Tabela 1 podem ser preenchidas, veja a Tabela 3.

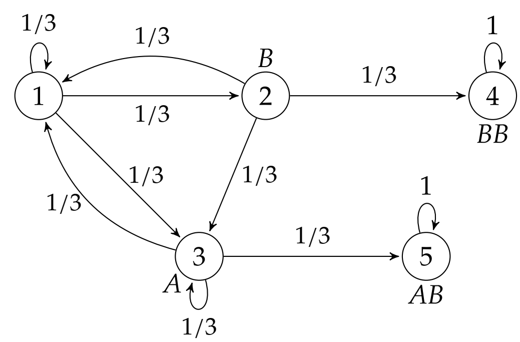

Figura 2: Diagrama de transições para o Caso 2.

	BB	BP	BA	PB	PP	PA	AB	AP	AA
BB	—	?	?	$1/3$	?	?	$1/3$	?	?
BP	?	—	$1/2$	?	$2/3$	?	?	?	?
BA	?	$1/2$	—	?	?	?	?	?	$2/3$
PB	$2/3$	?	?	—	?	$1/2$	?	?	?
PP	?	$1/3$	?	?	—	?	?	$1/3$	?
PA	?	?	?	$1/2$	?	—	?	?	$2/3$
AB	$2/3$	?	?	?	?	?	—	$1/2$	?
AP	?	?	?	?	$2/3$	?	$1/2$	—	?
AA	?	?	$1/3$	?	?	$1/3$	?	?	—

Tabela 3: Probabilidades para os Casos 1 e 2.

Caso 3: Apostas BB **e** AP

Neste caso, a suposição é que um jogador escolheu a aposta BB e o outro a aposta AP. Para esse par de apostas a cada retirada de uma bolinha o jogo se encontra em um dos 5 estados descritos a seguir.

Estado 1: nada foi acumulado por nenhum dos jogadores;
Estado 2: a última retirada foi B e o jogador com a aposta BB conseguiu a primeira cor;
Estado 3: a última retirada foi A e o jogador com a aposta AP conseguiu a primeira cor;
Estado 4: as duas últimas retiradas foram BB e o jogo termina;
Estado 5: as duas últimas retiradas foram AP e o jogo termina.

Na Figura 3 encontra-se o diagrama de transições entre os estados e, na Equação 3, a matriz de transições para esse caso.

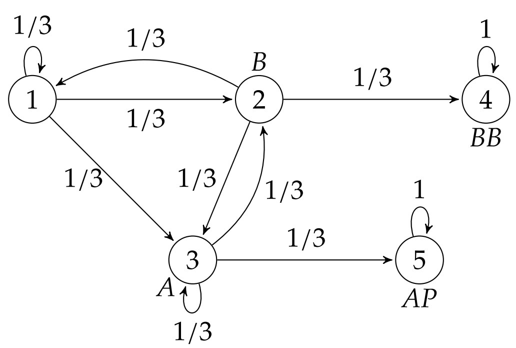

Figura 3: Diagrama de transições para o Caso 3.

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Semelhante aos casos anteriores é possível verificar que a matriz M tem dois autovetores linearmente independente associados ao autovalor $\lambda_1 = 1$; são eles $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,2,0,5,-2)$. Os outros autovalores não são determinados tão facilmente: para isso é preciso encontrar as raízes do polinômio p de grau 3 definido por

$$p(\lambda) = 27\lambda^3 - 18\lambda^2 - 3\lambda + 1.$$

Aplicando o Teorema de Bolzano, é possível concluir que o polinômio p tem três raízes reais distintas pertencentes ao intervalo $(-1,1)$, uma vez que $p(-1) = -41 < 0$, $p(0) = 1 > 0$, $p(1/2) = -13/8 < 0$ e $p(1) = 7 > 0$. Logo, mesmo sem encontrar todos os autovalores de M, sabe-se que essa matriz possui, além do autovalor $\lambda_1 = 1$, mais três autovalores reais distintos. Dessa forma pode-se afirmar que existe uma base de autovetores de M, logo M é diagonalizável e podemos prosseguir com as contas.

Sabemos que existe $\lim_{n\to\infty} M^n$, mas como não encontramos todos os autovalores e autovetores de M esse limite não será calculado de forma analítica. A alternativa será encontrá-lo a partir de iterações computacionais. Para isso M^n foi calculada para n cada vez maior, até que a convergência fosse observada. As entradas $(1,4)$ e $(1,5)$ dessa matriz fornecem as probabilidades de vitória do jogador que apostou em BB e do jogador que apostou em AP, respectivamente. O resultado para esse caso é que o jogo não é justo, o jogador que escolher a aposta BB tem probabilidade $3/7$ de ganhar enquanto o jogador que escolher a aposta AP tem probabilidade $4/7$ de ganhar.

Veja que esse caso é análogo a todos os casos em que um jogador escolhe uma sequência com as duas bolinhas da mesma cor e o outro jogador escolhe uma sequência com as duas outras cores. Esses casos são: BB e AP, BB e PA, PP e AB, PP e BA, AA e BP, AA e PB. Para todos esses casos o jogador que escolher a sequência com duas cores diferentes tem maior probabilidade de ganhar.

	BB	BP	BA	PB	PP	PA	AB	AP	AA
BB	—	?	?	$1/3$	?	$3/7$	$1/3$	$3/7$	?
BP	?	—	$1/2$	?	$2/3$	?	?	?	$4/7$
BA	?	$1/2$	—	?	$4/7$	?	?	?	$2/3$
PB	$2/3$	?	?	—	?	$1/2$	?	?	$4/7$
PP	?	$1/3$	$3/7$	?	—	?	$3/7$	$1/3$	?
PA	$4/7$	?	?	$1/2$	?	—	?	?	$2/3$
AB	$2/3$	?	?	?	$4/7$	?	—	$1/2$	?
AP	$4/7$	?	?	?	$2/3$	?	$1/2$	—	?
AA	?	$3/7$	$1/3$	$3/7$	?	$1/3$	?	?	—

Tabela 4: Probabilidades para os Casos 1, 2 e 3.

Caso 4: Apostas BP e PA

Neste caso a suposição é que um jogador escolheu a aposta BP e o outro a aposta PA. Para esse par de apostas a cada retirada de uma bolinha o jogo se encontra em um dos 5 estados descritos a seguir.

- Estado 1: nada foi acumulado por nenhum dos jogadores;
- Estado 2: a última retirada foi B e o jogador com a aposta BP conseguiu a primeira cor;
- Estado 3: a última retirada foi P e o jogador com a aposta PA conseguiu a primeira cor;
- Estado 4: as duas últimas retiradas foram BP e o jogo termina;
- Estado 5: as duas últimas retiradas foram PA e o jogo termina.

O diagrama de transições para esse caso está na Figura 4 e a matriz de transições M está apresentada na Equação 4.

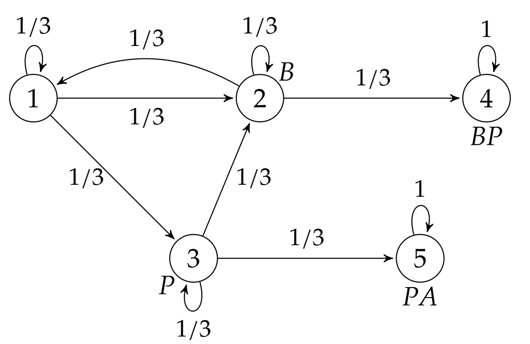

Figura 4: Diagrama de transições para o Caso 4.

$$M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Mais uma vez $\lambda_1 = 1$ é autovalor da matriz M associado a dois autovetores linearmente independentes: $\mathbf{v}_1 = (1,1,1,1,1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1,2,0,3,-2)$. Os outros três autovalores são as raízes do polinômio

$$p(\lambda) = 27\lambda^3 - 27\lambda^2 + 6\lambda - 1.$$

A partir do Método de Tartaglia [2] é possível verificar que este polinômio possui uma raiz real e outras duas complexas conjugadas. Logo existem mais três autovetores linearmente independentes associados à matriz M, e consequentemente, M é diagonalizável.

Novamente será feito o uso de iterações computacionais para encontrar $\lim_{n\to\infty} M^n$. O resultado para esse caso é que o jogo novamente não é justo, o jogador que escolher a aposta BP tem probabilidade 3/5 de ganhar enquanto o jogador que escolher a aposta PA tem probabilidade 2/5 de ganhar.

Veja que esse caso é análogo a todos os casos em que um jogador escolhe uma sequência com as duas bolinhas de cores diferentes e o outro jogador escolhe a sequência tal que a primeira cor é igual à segunda cor do adversário e a segunda cor igual à cor que o adversário não escolheu. Esses casos são: BP e PA, BA e AP, PB e BA, PA e AB, AB e BP, AP e PB. Com isso mais algumas posições da Tabela 1 podem ser preenchidas, veja a Tabela 5.

	BB	BP	BA	PB	PP	PA	AB	AP	AA
BB	—	?	?	$^1/_3$	?	$^3/_7$	$^1/_3$	$^3/_7$	?
BP	?	—	$^1/_2$	?	$^2/_3$	$^3/_5$	$^2/_5$	?	$^4/_7$
BA	?	$^1/_2$	—	$^2/_5$	$^4/_7$	?	?	$^3/_5$	$^2/_3$
PB	$^2/_3$	?	$^3/_5$	—	?	$^1/_2$	?	$^2/_5$	$^4/_7$
PP	?	$^1/_3$	$^3/_7$	?	—	?	$^3/_7$	$^1/_3$	?
PA	$^4/_7$	$^2/_5$	?	$^1/_2$	?	—	$^3/_5$	?	$^2/_3$
AB	$^2/_3$	$^3/_5$	?	?	$^4/_7$	$^2/_5$	—	$^1/_2$	?
AP	$^4/_7$	?	$^2/_5$	$^3/_5$	$^2/_3$	?	$^1/_2$	—	?
AA	?	$^3/_7$	$^1/_3$	$^3/_7$	?	$^1/_3$	?	?	—

Tabela 5: Probabilidades para os Casos 1, 2, 3 e 4.

Casos restantes

Quatro casos ainda não foram abordados. São eles:

- Caso 5: Apostas BB e PP, ou qualquer caso em que os dois jogadores apostam em sequências de cores repetidas: BB e AA, PP e AA;
- Caso 6: Apostas BP e PB, ou qualquer caso em que os dois jogadores apostam em sequências espelhadas: BA e AB, PA e AP;

Caso 7: Apostas BB e BP, ou qualquer caso em que um jogador aposta em uma sequência de cores repetidas e o outro em uma sequência de cores diferentes tais que a primeira delas é a cor escolhida pelo adversário: BB e BA, PP e PB, PP e PA, AA e AB, AA e AB;

Caso 8: Apostas BP e AP, ou qualquer caso em que os dois jogadores apostam em sequências de cores diferentes e a última cor das duas apostas é a mesma: BA e PA, PB e AB.

Em todos esses casos o jogo é justo, ou seja, a probabilidade de cada jogador ganhar é 1/2. Deixo essa parte como exercício para o leitor.

Assim já é possível de preencher toda a Tabela 1, veja a Tabela 6 com todas as probabilidades para cada par de aposta. Lembre-se que na tabela estão apresentadas as probabilidades de vitória para o jogador que escolheu a aposta definida por cada linha.

	BB	BP	BA	PB	PP	PA	AB	AP	AA
BB	—	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_2$	$^3/_7$	$^1/_3$	$^3/_7$	$^1/_2$
BP	$^1/_2$	—	$^1/_2$	$^1/_2$	$^2/_3$	$^3/_5$	$^2/_5$	$^1/_2$	$^4/_7$
BA	$^1/_2$	$^1/_2$	—	$^2/_5$	$^4/_7$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^3/_5$	$^2/_3$
PB	$^2/_3$	$^1/_2$	$^3/_5$	—	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^2/_5$	$^4/_7$
PP	$^1/_2$	$^1/_3$	$^3/_7$	$^1/_2$	—	$^1/_2$	$^3/_7$	$^1/_3$	$^1/_2$
PA	$^4/_7$	$^2/_5$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^1/_2$	—	$^3/_5$	$^1/_2$	$^2/_3$
AB	$^2/_3$	$^3/_5$	$^1/_2$	$^1/_2$	$^4/_7$	$^2/_5$	—	$^1/_2$	$^1/_2$
AP	$^4/_7$	$^1/_2$	$^2/_5$	$^3/_5$	$^2/_3$	$^1/_2$	$^1/_2$	—	$^1/_2$
AA	$^1/_2$	$^3/_7$	$^1/_3$	$^3/_7$	$^1/_2$	$^1/_3$	$^1/_2$	$^1/_2$	—

Tabela 6: Probabilidades para qualquer par de apostas.

Comentários finais

Repare que se você conhece a Tabela 6 e seu adversário não, você pode usar essa informação para fazer uma aposta melhor. Basta sugerir que seu adversário escolha primeiro a aposta dele e só depois disso você faz a sua escolha. Sabendo qual a aposta do seu adversário sempre é possível escolher uma aposta tal que a probabilidade de ganhar seja maior que 1/2, uma vez que todas as colunas da Tabela 6 possuem entradas maiores do que 1/2. No pior cenário, quando seu adversário escolher uma aposta com duas cores diferentes, é possível escolher uma aposta que te dê $3/5 = 60\%$ de probabilidade de ganhar. O melhor cenário será quando seu adversário escolher uma sequência com duas cores iguais: neste caso, é possível escolher uma aposta que te garanta $2/3 \approx 66,6\%$ de probabilidade de ganhar.

Mas se os dois jogadores conhecerem a Tabela 6, ambos terão que selecionar suas apostas ao mesmo tempo, para que um não se aproveite da aposta do outro. Nesse caso, a melhor estratégia será escolher uma sequência de duas cores diferentes e torcer para que a sua primeira cor não seja a última cor escolhida pelo seu adversário, que provavelmente adotou essa melhor estratégia e escolheu duas cores diferentes também.

Referências

[1] Hoffman, K; Kunze, R. A. *Linear algebra*. Prentice-Hall mathematics series. Prentice-Hall, 1971.

[2] Lima, E. L. A equação do terceiro grau. *Revista Matemática Universitária*, (5):9-23, 1987.

[3] Osborne, M. J. *An introduction to game theory*. Oxford University Press, .

[4] Ross, S. *Introduction to probability models*. Academic Press, 2006.

[5] Saldanha, N. Como perder amigos e enganar pessoas. *Eureka!*, (1):41-50, 1998.

[6] Schwarz, W. *40 puzzles and problems in probability and mathematical statistics*. Problem books in mathematics. Springer, 2007.

[7] Taylor, H. M.; Karlin, S. *An introduction to stochastic modeling*. Academic press, 3rd edition, 1998.

Jessica Kubrusly
Universidade Federal Fluminense
jessicakubrusly@id.uff.br