RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2020
DOI: (colocar número DOI aqui)

UM ESTUDO SOBRE AS SOLUÇÕES REAIS DA EQUAÇÃO $a^x = x^a$ ONDE $a \geq 2$ É UM INTEIRO

RONALD SIMÕES DE MATTOS PINTO
LILIANA MANUELA GASPAR CERVEIRA DA COSTA

1. Introdução

A existência e natureza das soluções reais da equação $2^x = x^2$ foi tratada por E. L. Lima em [4] onde mostra que duas das três soluções reais da equação são inteiras e positivas, 2 e 4, e a terceira é negativa e irracional. O caso da equação $p^x = x^p$, em que p é um primo ímpar, foi tratado por G. G. Bastos em [1], no qual se concluiu pela existência de exatamente duas soluções reais: p e uma raiz irracional entre 1 e p. No presente artigo, generalizando os estudos anteriores, vamos investigar a natureza (quanto à racionalidade ou irracionalidade) das soluções reais da equação $a^x = x^a$, onde $a \geq 2$ é um inteiro não necessariamente primo. Serão necessárias somente algumas ferramentas de Cálculo Diferencial e de Aritmética, incluindo o Teorema Fundamental da Aritmética. Para a representação dos gráficos apresentados foi utilizado o *software* Geogebra.

2. As soluções reais da equação $a^x = x^a$, $a \geq 2$ inteiro

Examinaremos, nesta seção, a equação $a^x = x^a$, onde $a \geq 2$ é um inteiro não necessariamente primo. Para isso mudaremos alguns dos argumentos utilizados em [1], de forma a dispensar a hipótese de $a \geq 2$ ser um inteiro primo. Vamos analisar primeiramente as raízes positivas e depois as possíveis raízes negativas.

Começamos por observar que a equação $a^x = x^a$, $a \geq 2$ inteiro, possui no máximo duas soluções positivas. Para esse propósito, repare

Data de aceitação: 22 de setembro de 2019.
Palavras chave. Números irracionais, equações.

que quando $x > 0$ então

$$a^x = x^a \Leftrightarrow x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln a}{a} = 0.$$

Portanto, estudar as soluções da equação $a^x = x^a$ quando x é positivo é equivalente a estudar as raízes da função $g_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $g_a(x) = \dfrac{\ln x}{x} - \dfrac{\ln a}{a}$. Derivando a função g_a temos $g_a'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. Observando que $1 - \ln x > 0$ quando $x < e$ e $1 - \ln x < 0$ quando $x > e$, constatamos que g é estritamente crescente no intervalo $(0, e]$ e estritamente decrescente no intervalo $[e, +\infty)$. Logo a função g_a possui no máximo duas raízes.

Isso nos permite concluir que a equação $a^x = x^a$, nos casos em que $a = 2$ ou $a = 4$, possui exatamente duas soluções positivas. Com efeito, os números 2 e 4 são, evidentemente, as duas soluções positivas das equações $2^x = x^2$ e $4^x = x^4$.

Vamos mostrar agora que a equação $a^x = x^a$, nos casos em que $a = 3$ ou $a \geq 5$ possui exatamente duas soluções positivas.

Começaremos pelo caso em que $a = 3$. Note que estudar as soluções positivas da equação $3^x = x^3$ é equivalente a estudar as raízes positivas da função $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_3(x) = 3^x - x^3$. Uma raiz é três. Para mostrar a existência da outra raiz, note que $f_3(2) = 3^2 - 2^3 = 1 > 0$ e $f_3\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{243} - \dfrac{125}{8} < 0$. Como f_3 é contínua em todos os pontos do domínio, segue do Teorema do Valor Intermediário aplicado ao intervalo $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ que existe um $\beta \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$ tal que $f_3(\beta) = 0$. (O valor da raiz β, cuja estimativa pode ser obtida pelo Método de Newton, é aproximadamente $2,47805$). A figura a seguir ilustra o gráfico da função f_3.

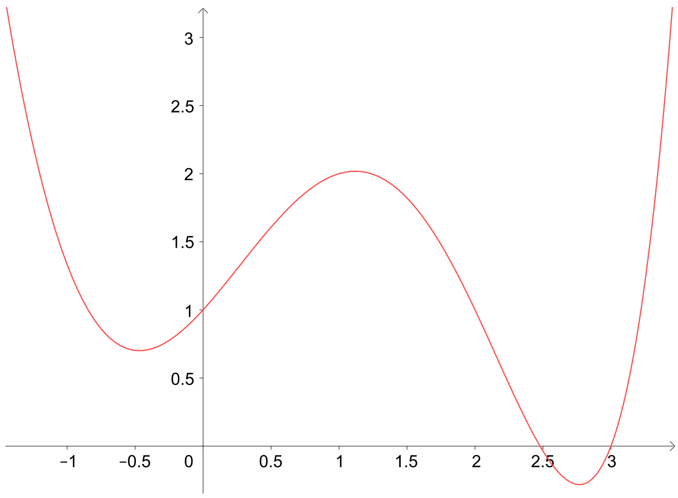

Figura 1. Gráfico da função f_3.

No caso em que $a \geq 5$, para cada a, devemos investigar as raízes positivas da função $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f_a(x) = a^x - x^a$. Note que $f_a(1) = a-1 \geq 5-1 = 4 > 0$ e $f_a(2) = a^2 - 2^a < 0$, pois a desigualdade $n^2 < 2^n$ é válida para todo número natural $n \geq 5$, como se pode verificar por indução. Como a função f_a é contínua em todos os pontos do domínio, segue do Teorema do Valor Intermediário aplicado ao intervalo $[1, 2]$ que existe um real $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Portanto, $a^c = c^a$. A Figura 2 mostra a localização dessa raiz no intervalo $(1, 2)$. Já que a também é uma raiz de f_a, concluímos pela existência de exatamente duas raízes positivas.

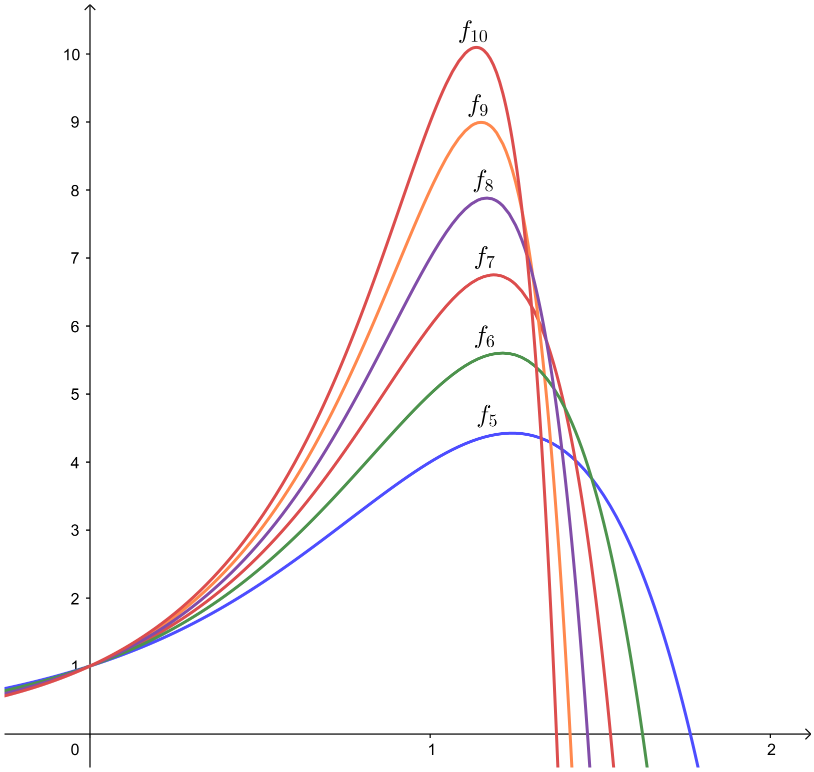

FIGURA 2. Gráfico das funções f_5, f_6, f_7, f_8, f_9 e f_{10}.

Vamos agora mostrar que $a \geq 5$ é a única raiz racional positiva de f_a. Daí decorre que a outra raiz positiva de f_a é um número irracional. Para isso, suponha que m e n são dois inteiros positivos e primos entre si tais que a fração $\dfrac{m}{n}$ seja uma raiz de f_a. Assim,

$$f_a\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^a \Leftrightarrow a^m = \left(\frac{m}{n}\right)^{an} \Leftrightarrow a^m n^{an} = m^{an}.$$

Decorre da última igualdade e do Teorema Fundamental da Aritmética que todos os fatores primos de n também são fatores primos de m. Mas isso não pode ocorrer pois m e n são primos entre si. Dessa maneira, somos obrigados a concluir que n é igual a 1 e a fração $\dfrac{m}{n}$ é, na realidade, o número inteiro $\dfrac{m}{1} = m$. Daqui resulta que a raiz $c \in (1, 2)$ de f_a é um número irracional. A demonstração da irracionalidade da raiz $\beta \in (2, 3)$ da função f_3 é análoga. Isso encerra o nosso estudo sobre as soluções positivas da equação $a^x = x^a$, $a \geq 2$ inteiro.

Devemos investigar agora as soluções negativas da equação $a^x = x^a$, $a \geq 2$ inteiro. Vamos supor que a é ímpar. Nesse caso f_a não possui raiz negativa pois $f_a(x) = a^x - x^a > 0$ se $x < 0$. Suponha agora que a é par. Repare que $f_a(-1) = a^{-1} - (-1)^a = \dfrac{1-a}{a} < 0$ e $f_a(0) = 1 > 0$. Aplicando o Teorema do Valor Intermediário no intervalo $[-1, 0]$ segue que f_a admite uma raiz $c \in (0, 1)$. Essa é a única raiz negativa. Com efeito, como $f_a'(x) = a^x \ln a - ax^{a-1} > 0$, para todo $x \leq 0$ então f_a é estritamente crescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e, dessa forma, admite no máximo uma raiz. A Figura 3 ilustra o fato de as funções f_a terem uma raiz negativa no intervalo $(-1, 0)$, quando a é par, e não terem raízes negativas quando a é ímpar.

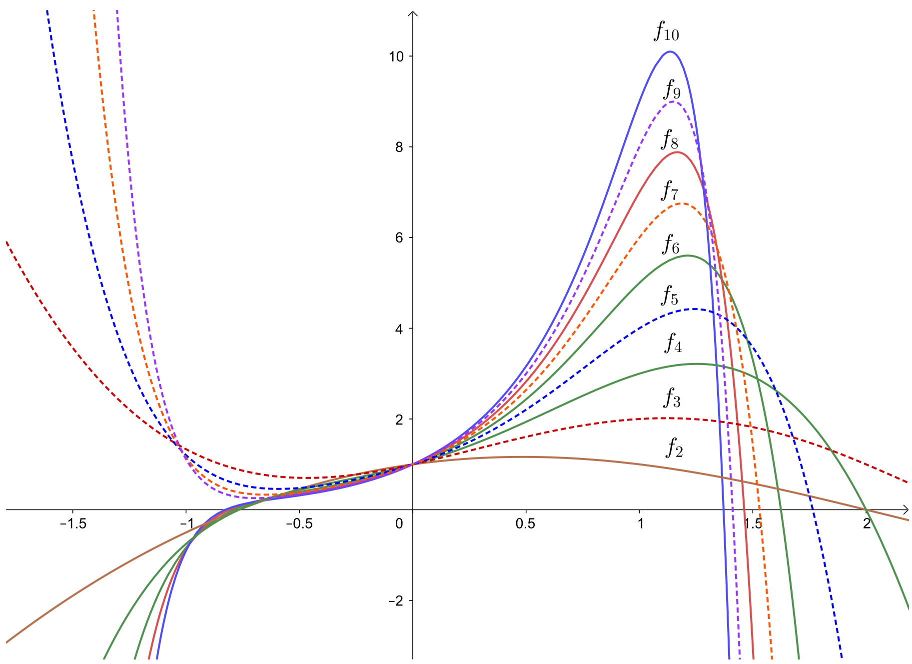

Figura 3. Representação gráfica de f_a: tracejado para a ímpar e traço cheio para a par.

Nosso objetivo agora é mostrar que a raiz negativa é irracional. Para isso, suponha que existem inteiros positivos m e n primos entre si tais que a fração $-\dfrac{m}{n} \in (-1, 0)$ seja uma raiz de f. Assim,

$$f_a\left(-\frac{m}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow a^{-\frac{m}{n}} = \left(-\frac{m}{n}\right)^a \Leftrightarrow a^{-m} = \left(\frac{m}{n}\right)^{an} \Leftrightarrow n^{an} = a^m m^{an}.$$

Segue da última igualdade e do Teorema Fundamental da Aritmética que todo fator primo de m é também fator primo de n. Mas isso não pode ocorrer, pois m e n são primos entre si. Logo, m é igual a 1 e a igualdade acima fica

$$n^{an} = a.$$

Como a é par, n também é par. Assim, podemos escrever $a = 2^k b$ e $n = 2^\ell c$, com b e c ímpares e $k, \ell \geq 1$. Desse modo, temos:

$$n^{an} = a \Leftrightarrow (2^\ell c)^{(2^k b)2^\ell c} = 2^k b \Leftrightarrow 2^{\ell \cdot 2^{k+\ell} \cdot bc} \cdot c^{2^{k+\ell} \cdot bc} = 2^k b.$$

Como b e c são ímpares, concluímos que $\ell \cdot 2^{k+\ell} \cdot bc = k$. Mas isso não pode ocorrer pois $2^k > k$ para todo $k \geq 1$. Dessa forma, a raiz $c \in (-1, 0)$ é um número irracional.

3. As soluções irracionais da equação $a^x = x^a$ onde $a \geq 2$ é inteiro, são números transcendentes

Nesta breve seção vamos mostrar, com o auxílio do Teorema de Gelfond-Schneider, que as soluções irracionais da equação $a^x = x^a$, onde $a \geq 2$ é inteiro, são números transcendentes. Antes, no entanto, convém lembrar de alguns fatos a respeito dos números algébricos e transcendentes. Um número complexo é dito *algébrico* quando é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. O conjunto dos números algébricos é fechado em relação à multiplicação. Isto é, se α e β são dois números algébricos, então o produto $\alpha\beta$ é também um número algébrico [2]. Em particular, se α é algébrico e k é um inteiro positivo, então α^k é também algébrico. Um número (complexo) que não é algébrico é dito *transcendente*. Existe uma infinidade (não enumerável) de números transcendentes [6]. Por exemplo, os números e e π são transcendentes [2].

Vamos provar que as soluções irracionais da equação $a^x = x^a$, $a \geq 2$ inteiro, são números transcendentes. Para isso, utilizaremos o Teorema de Gelfond-Schneider enunciado a seguir: *sejam α e β números algébricos. Se $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$ e β não for um real racional, então α^β é transcendente.* A demonstração desse fato encontra-se nas referências [5] ou [7].

Seja x_0 uma solução irracional da equação $a^x = x^a$. Vamos supor que x_0 é um irracional algébrico. Então, por um lado, ${x_0}^a$ também será algébrico pois, conforme mencionado anteriormente, o produto de números algébricos é também um número algébrico. Por outro lado, decorre, do Teorema de Gelfond-Schneider, que o número a^{x_0} é transcendente pois a é, evidentemente, um número algébrico e x_0 é, por hipótese, irracional. Daí, não podemos ter a igualdade $a^{x_0} = {x_0}^a$. Ou seja, as soluções irracionais são números transcendentes. Desse fato decorre que as soluções irracionais não são construtíveis com régua e compasso, já que todo número construtível é algébrico (de grau igual a uma potência de 2), ver [3].

Referências

[1] BASTOS, G. G. *Os Zeros Reais da Equação $p^x = x^p$, p Primo*, Revista Matemática Universitária nº 34, 2003.
[2] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*, 3ª Edição. Coleção Iniciação Científica, SBM, Rio de Janeiro, 2002.
[3] HERSTEIN, I. N. *Topics in Algebra*. 2. ed. Wiley India Pvt. Limited, 2006.
[4] LIMA, E. L. *Quais são as raízes da equação $x^2 = 2^x$?* Revista do Professor de Matemática, nº 3, 1983.
[5] MARQUES, DIEGO. *Teoria dos números transcendentes*, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
[6] NIVEN, I. *Números: Racionais e Irracionais*; Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1990.
[7] NIVEN I. *Irrational Numbers*. Rahway, NJ: The Mathematical Association of America, 1956.

Colégio Pedro II
E-mail address: ronaldsimoes@gmail.com, lmgccosta@gmail.com