RMU REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 2, 2020

ISSN: 2675-5254 – **DOI:** https://doi.org/10.21711/26755254/rmu202021

TEOREMAS DE PONTO FIXO DE BANACH E KNASTER-TARSKI, REVISTOS

ANDREAS B. M. BRUNNER E PAULO R. S. MALTA

RESUMO. Neste trabalho apresentaremos a Teoria dos Espaços Métricos Gerais, uma nova estrutura em que estaremos aptos a generalizar tanto espaços métricos quanto ordens parciais. Para essas teorias, temos dois teoremas de ponto fixo: o Teorema do Ponto Fixo de Banach para espaços métricos e o Teorema do Ponto Fixo de Knaster–Tarski para ordens parciais. Nesse novo contexto provaremos construtivamente ambos os teoremas como corolário de um único resultado, cujas hipóteses generalizam espaços métricos completos e reticulados completos.

1. INTRODUÇÃO

Durante o trabalho de iniciação científica os autores se perguntaram se existia conexão entre dois teoremas de ponto fixo bem conhecidos e importantes na matemática: os teoremas de Banach para contrações e de Knaster-Tarski para reticulados completos. Será que eles poderiam ser formulados e derivados em algum contexto comum? Buscando resultados recentes no tema, os autores encontraram os artigos [5] e [8]. Nesses trabalhos foram desenvolvidos, com o uso de conceitos da Teoria das Categorias, resultados que permitiam deduzir os dois teoremas por meio de uma única teoria, a Teoria dos Espaços Métricos Gerais, cf. [1], abordando completude por meio do Lema de Yoneda. Com o intuito de apresentar de maneira clara os resultados obtidos, no presente artigo simplificamos a abordagem. Neste caminho, é preciso introduzir os espaços métricos gerais e completá-los nesse novo contexto. Os vários tipos de completamento nessa teoria permitem a conexão com os completamentos usuais concernentes a espaços métricos usuais, reticulados completos e dcpo's com $\perp$ (vide seção 1.2, após a Proposição 2), cf. [2] e [3]. A ferramenta necessária para essa abordagem são os funtores completamento, que, utilizando em particular os funtores admissíveis, permitem à ordem induzida a partir de um espaço métrico geral ser uma dcpo. Assim, por meio desse truque, é possível deduzir um ponto fixo da função $f : X \to X$ se tivermos o ponto fixo de uma certa "extensão"

Data de aceitação: 2 de março de 2020.

Palavras chave. Teoremas de ponto fixo.

$f^* : \widehat{X} \to \widehat{X}$. A monografia do segundo autor, cf. [7], exibe com muitos detalhes a maneira de obter esses resultados, alguns dos quais apresentaremos aqui.

Problemas de ponto fixo são de interesse tanto da matemática quanto da computação. Por exemplo, para estabelecer existência e unicidade da solução de uma equação diferencial ordinária, garantido pelo Teorema de Picard-Lindelöf, podemos demonstrá-lo usando o Teorema de Ponto Fixo para Contrações de Banach. Já para demonstrar o Teorema de Schröder-Bernstein, que estabelece uma bijeção entre dois conjuntos A e B tendo injeções de A para B e de B para A, o uso do Teorema de Ponto Fixo de Knaster-Tarski é uma opção. Em álgebra linear, dado um sistema linear $Ax = 0$, a existência de pontos fixos para $A + I$ garante a solução desse sistema. Na área da computação, teoremas de ponto fixo também são muito importantes, pois estabelecem quando um certo cálculo computacional para. Podemos descrever o cálculo ou a computação por meio de uma função entre dois dcpo's ou reticulados completos preservando ordem. Assim, obtendo um ponto fixo para essa função, a computação para. Isto mostra o quão necessário são os teoremas de ponto fixo para aplicações nas diversas áreas da matemática.

De forma resumida abordamos neste introdução alguns conceitos acerca de ordens parciais, dcpo's, redes e categorias. Para maior esclarecimento, na seção 2 discutiremos espaços métricos gerais e o mergulho de Yoneda antes de introduzir os diversos tipos de completamento de espaços métricos gerais, em particular de ordens parciais, espaços métricos e direcionados, que trataremos com mais detalhes na seção 3. Na última seção, demonstraremos os teoremas 4 e 13, que têm como corolários os teoremas de Knaster-Tarski e Banach.

1.1. **Ordens Parciais.** Seja P um conjunto. P é um *conjunto ordenado*, ou uma *ordem parcial*, se existe uma relação binária $\leq$ em P que satisfaz:

i) $x \leq x, \forall x \in P$ (*reflexiva*);
ii) Se $x \leq y$ e $y \leq x$, então $x = y$ (*antissimétrica*);
iii) Se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x \leq z$ (*transitiva*).

Denotamos o conjunto ordenado pelo par $(P, \leq)$, a fim de tornar claro qual ordem é utilizada.

Intuitivamente associamos ordens ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ ou à reta real $\mathbb{R}$. De fato, esses dois conjuntos são ordens parciais, porém estes estão munidos com uma quarta propriedade mais forte, que permite compararmos qualquer par de elementos:

iv) $\forall x, y \in P, \quad x \leq y$ ou $y \leq x$ (*linear*).

Caso um conjunto P seja ordem parcial e também satisfaça iv), dizemos que P é *totalmente ordenado* ou, equivalentemente, que é uma *ordem conectada*.

Tomando X um conjunto, sabemos que $\mathcal{P}(X) = \{A; A \subseteq X\}$ é parcialmente ordenado pela inclusão $\subseteq$. Em geral, essa ordem não é conectada.

Um subconjunto $S \subseteq P$ é uma *cadeia* se com a ordem herdada de P é totalmente ordenado.

Em geral, quando lidamos com estruturas, nos interessamos por aplicações que preservem essa estrutura. Em nosso caso, para ordens parciais, estaremos interessados em aplicações que preservem a ordem. Desta maneira, sejam P e Q ordens parciais e $f : P \to Q$ uma aplicação. Dizemos que:

i) f *preserva ordem* se $\forall x, y \in P$, $x \leq_P y$ implica $f(x) \leq_Q f(y)$;
ii) f é um *monomorfismo* se preserva ordem e é injetiva;
iii) f é um *isomorfismo* se preserva ordem e é bijetiva.

Observe que se tivermos um monomorfismo $f : P \to Q$, então temos um isomorfismo entre P e sua imagem por f e, neste caso, toda sua estrutura é preservada. Por exemplo: para $A \subseteq P$, A é uma cadeia em P se e somente se $f(A)$ é uma cadeia em Q.

Dada uma ordem parcial $(P, \leq)$, podemos definir uma ordem *dual* em P por $(P, \leq^{op})$, onde $x \leq^{op} y$ se, e somente se, $y \leq x$. Afim de simplificar a notação, denotamos por P^{op} o conjunto P munido da ordem dual. Essa definição em nada altera as propriedades anteriores da ordem em P, exceto pelo fato de estarem "trocadas de baixo para cima". Por exemplo, considerando a linguagem da ordem $L := \{\leq\}$ e a fórmula $\phi(x, y) := x \leq y$, então $\phi(x, y)^{op}$ é a fórmula $y \leq x$, na mesma linguagem L. Usando técnicas da lógica matemática, é fácil de demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 1 (Princípio da Dualidade)**.** *Seja ϕ uma proposição na linguagem de primeira ordem $L := \{\leq\}$, que vale na ordem $(P, \leq)$. Então ϕ^{op} vale em $(P, \leq^{op})$, onde ϕ^{op} é a proposição obtida de ϕ substituindo $\leq$ por $\leq^{op}$.*

Indução na complexidade das L-fórmulas. ∎

1.2. **Reticulados e dcpo's.** Dentre as ordens parciais, vamos nos interessar por algumas que possuam algumas propriedades particulares. Para isto, iremos buscar alguns elementos especiais nestes conjuntos. Seja $Q \subseteq P$ ordem parcial:

i) $a \in Q$ é um elemento *maximal* se para todo $x \in Q$, $a \leq x \in Q \Rightarrow a = x$;
ii) Se $a \in Q$ é tal que $x \leq a$, $\forall x \in Q$, a é o *maior* elemento de Q.

Observe que o maior elemento, caso exista, é único. De maneira análoga definimos um elemento *minimal* e o *menor* elemento, levando em consideração a ordem dual de P. O maior elemento de P, caso exista, é dito *top* e denotaremos por $\top$. Analogamente, caso exista o menor elemento em P, o chamaremos de *bottom*, denotado por $\bot$. As notações vêm da lógica, $\top$ significa *verdade* e $\bot$ *absurdo*.

Se $Q \subset P$ definimos $\uparrow Q = \{y \in P; (\exists x \in Q)\ x \leq y\}$ e dizemos que Q é *up-set* se $Q = \uparrow Q$. De maneira análoga, definimos $\downarrow Q = \{y \in P; (\exists x \in Q)\ y \leq x\}$ e dizemos que Q é *down-set* se $Q = \downarrow Q$. Um elemento $x \in P$ é dito uma *cota superior* de Q se $a \leq x$, $\forall a \in Q$. De maneira dual definimos uma *cota inferior*. Denotamos o conjunto das cotas superiores de Q por Q^u e as cotas inferiores por Q^l. Observe que esses conjuntos sempre são respectivamente up-set e down-set. Caso Q^u possua menor elemento, dizemos que Q tem *sup* ou *supremo*. De maneira análoga o *ínfimo* de Q, ou *inf*, será o maior elemento de Q^l, caso exista. Empregaremos a notação sup Q ou $\bigvee Q$ para denotar o supremo e inf Q ou $\bigwedge Q$, para denotar o ínfimo. Para dois elementos $x, y \in P$, denotaremos $\sup\{x, y\} = x \vee y$ e $\inf\{x, y\} = x \wedge y$. Note que, em virtude do maior e do menor elementos serem únicos, segue que o supremo e o ínfimo são únicos, caso existam.

À luz das definições anteriores, dado um conjunto ordenado P não-vazio:

i) Se $x \vee y$ e $x \wedge y$ existe, para todo $x, y \in P$, dizemos que P é um *reticulado*;
ii) Se $\bigvee Q$ e $\bigwedge Q$ existe, para todo $Q \subseteq P$, dizemos que P é um *reticulado completo*.

Observe que se P é um reticulado completo, P possui bottom e top. Assim com a ordem usual $\leq$, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ são reticulados, porém não são completos, uma vez que não possuem bottom nem top. Por outro lado, se $I \subseteq \mathbb{R}$ é um intervalo fechado, com a ordem herdada de $\mathbb{R}$ este é um reticulado completo. Seja X conjunto, então $(\mathcal{P}(X); \subseteq)$ é um reticulado completo, onde o supremo e o ínfimo são calculados simplesmente através de união e interseção, respectivamente.

A demonstração da próxima proposição é simples.

Proposição 2. *Uma ordem parcial $(P; \leq)$ é um reticulado completo sse para todo $A \subseteq P$, existe $\bigvee A$. Note que, $\bigvee A = \bigvee(\downarrow A)$.* ■

Um conjunto $Q \subseteq P$ não vazio é *direcionado* se para todo $x, y \in Q$, $\exists\, h \in Q$ tal que $x \leq h$ e $y \leq h$. Observe que se $Q \subseteq P$ é direcionado, qualquer subconjunto finito $F \subseteq_f Q$ possui barreira superior em Q. É claro que toda cadeia $Q \subseteq P$ é direcionado. Assim, P é dito *dcpo com* $\perp$ ou *ordem parcial direcionada completa com primeiro elemento* se:

i) P possui bottom $\perp$;
ii) $\bigvee D$ existe, para todo $D \subseteq P$ direcionado.

Denotaremos $\bigvee D = \bigsqcup D$ para fazer menção ao sup de um conjunto direcionado. Ao omitirmos i), dizemos que P é dcpo. Em [2], temos uma bibliografia acessível sobre a teoria dos reticulados e das ordens, enquanto em [3], encontramos a teoria dos dcpo's com resultados e questões mais avançadas.

Sabemos da Análise que se uma função é contínua, então esta preserva limites. Esta mesma noção podemos traduzir para dcpo's, considerando conjuntos direcionados. Assim se P, S são dcpo's, uma função $f : P \to S$ é dita *contínua* se $f(\bigsqcup D) = \bigsqcup f(D)$, para todo $D \subseteq P$ direcionado. Observe que qualquer função contínua preserva ordem, porém não é difícil de ver que a recíproca não é verdadeira, apenas podemos garantir que $\bigsqcup f(D) \leq f(\bigsqcup D)$.

1.3. **Famílias, sequências e redes.** Para podermos entender a teoria dos espaços métricos gerais, é preciso trabalhar com redes e sua convergência. Sejam X um conjunto e I um conjunto de índices. Uma família $(x_i)_{i\in I}$ é uma função $x : I \to X$, cuja imagem $x(i)$ é denotada por x_i, para todo $i \in I$. Para $I = \mathbb{N}$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é dita uma *sequência* em X, e temos as sequências usuais. Se $(I, \leq)$ é ordem parcial direcionado, $(x_i)_{i\in I}$ é dita uma *rede* em X.

Para X espaço métrico, dizemos que uma rede $(x_i)_{i\in I}$ converge para $x \in X$, denotado por $\lim x_i = x$, quando para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in I$ de modo que para todo $j \geq N$ tenha-se $d(x_j, x) < \epsilon$. Uma rede $(x_i)_{i\in I}$ é dita de Cauchy caso dado $\epsilon > 0$ seja possível obter $N \in I$ de modo que para todo $i \geq j \geq N$ tenha-se $d(x_i, x_j) < \epsilon$.

Como sabemos, a convergência de uma rede de Cauchy nem sempre é garantida em um espaço métrico qualquer. Conforme a seguinte proposição, considerando-se a completude de um espaço métrico apenas por sequências de Cauchy, será possível obter convergência de qualquer rede de Cauchy.

Proposição 3. *Seja X espaço métrico. X é completo se, e somente se, toda rede de Cauchy converge.* ■

Demonstração. Seja $(x_i)_{i\in I}$ rede de Cauchy. Para cada $\epsilon_n = \frac{1}{n+1}$ tome $N(\epsilon_n)$ de modo que para todo $i \geq j \geq N(\epsilon_n)$ tenha-se $d(x_i, x_j) < \epsilon_n$. Desta maneira, defina $\mu : \mathbb{N} \to I$

recursivamente por:

$$\mu(n) = \begin{cases} N(\epsilon_0) & \text{se } n = 0 \\ \max\{N(\epsilon_n), \mu(n-1)\} & \text{para } n > 0 \end{cases}$$

Temos que $(x_{\mu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy pois dado $\epsilon > 0$, tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\epsilon_{n_0} < \epsilon$, teremos para todo $m \geq n \geq n_0$: $\mu(m) \geq \mu(n) \geq \mu(n_0) \geq N(n_0)$. Assim $d(x_{\mu(m)}, x_{\mu(n)}) < \epsilon_{n_0} < \epsilon$. Em virtude da completude de X a sequência $(x_{\mu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge, digamos para $x \in X$. Vamos mostrar que $(x_i)_{i\in I}$ converge para x. Ora, dado $\epsilon > 0$, tome $m \in \mathbb{N}$ de modo que $\frac{1}{m+1} < \frac{\epsilon}{2}$. Como $(x_{\mu(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $m \geq n_0$ tenha-se $d(x_{\mu(m)}, x) < \frac{\epsilon}{2}$. Assim, para todo $i \geq N(\epsilon_m)$ teremos:

$$\begin{aligned} d(x_i, x) &\leq d(x_i, x_{\mu(m)}) + d(x_{\mu(m)}, x) \\ &< \frac{1}{m+1} + \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

Portanto $(x_i)_{i\in I}$ converge a x. A recíproca é imediata. □

1.4. **Categorias.** A teoria das categorias surgiu na década de 40 do século XX com um trabalho de Eilenberg e MacLane. Esta teoria estuda estruturas matemáticas e como elas se relacionam através de *morfismos* e *funtores*. De certa forma, a teoria pode ser vista como uma generalização da Álgebra Universal. Temos aplicações interessantes na Matemática, como por exemplo, o desenvolvimento da lógica categorial e da teoria dos topoi, generalizando desta maneira ideias da Teoria dos Conjuntos. O livro [6] é direcionado aos matemáticos, onde é possível encontrar muitas construções categoriais importantes, como por exemplo, o lema de Yoneda. Já [4] é um livro bem acessível aos estudantes de graduação em várias áreas, como por exemplo matemática, computação e filosofia.

Em termos precisos dizemos que uma classe $\mathcal{C}$ é uma *categoria* quando satisfaz os seguintes axiomas:

(1) Possui uma coleção de $\mathcal{C}$-objetos;
(2) Possui uma coleção de $\mathcal{C}$-morfismos;
(3) Uma operação que associa a cada morfismo f um $\mathcal{C}$-objeto $a = \text{dom } f$ (dito domínio de f) e um $\mathcal{C}$-objeto $b = \text{cod } f$ (dito contradomínio de f);
   Notação: $f : a \to b$
(4) Uma operação que associa a cada par de morfismos (g, f) com $\text{dom } g = \text{cod } f$ um morfismo $g \circ f$, dito a composição de f e g, valendo $\text{dom } (g \circ f) = \text{dom } f$ e $\text{cod } (g \circ f) = \text{cod } g$ que satisfaz:
   Lei Associativa: Se f, g, h são morfismos tais que $\text{cod } f = \text{dom } g$ e $\text{cod } g = \text{dom } h$, então $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;
(5) Cada $\mathcal{C}$-objeto b possui um $\mathcal{C}$-morfismo $\mathbf{1}_b : b \to b$ que satisfaz:
   Lei da Identidade: Para todo $\mathcal{C}$-morfismo $f : a \to b$ e $g : b \to c$ vale: $\mathbf{1}_b \circ f = f$ e $g \circ \mathbf{1}_b = g$

Através da tabela abaixo seguem alguns exemplos de categorias:

CATEG.	OBJETOS	MORFISMOS
Set	Conjuntos	funções
Top	Espaços Topológicos	funções contínuas
Vect	Espaços Vetoriais	transformações lineares
Grp	Grupos	homomorfismos de grupos
Pos	Ordens parciais	funções que preservam ordem

Conforme os morfismos das categorias dadas pela tabela anterior, estes funcionam como uma maneira de preservar as estruturas de dois objetos distintos. De maneira análoga podemos definir o mesmo para categorias, através dos *funtores*.

Um funtor F de uma categoria $\mathcal{C}$ para uma categoria $\mathcal{D}$ é uma lei que associa:

i) a cada $\mathcal{C}$-objeto a um $\mathcal{D}$-objeto $F(a)$;
ii) a cada $\mathcal{C}$-morfismo $f : a \to b$ um $\mathcal{D}$-morfismo $F(f) : F(a) \to F(b)$ que satisfaz:
a) $F(\mathbf{1}_a) = \mathbf{1}_{F(a)}$, para todo $\mathcal{C}$-objeto a;
b) $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Neste caso F é dito um funtor *covariante*. Podemos substituir b) por:

b*) $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.

Caso satisfaça b*), F é dito funtor *contravariante*.

Por exemplo, podemos definir $F : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, que associa a cada grupo G o conjunto F(G), cujos elementos são os mesmos e a cada homomorfismo f a função $F(f)$, que associa os mesmos elementos. Este funtor é dito funtor *esquecimento*, cuja lei omite toda a estrutura de grupo inicial do conjunto. Para qualquer categoria cujos objetos sejam estruturas definidas sobre conjuntos e cujos morfismos sejam funções que preservam a estrutura, pode-se definir um funtor análogo.

2. ESPAÇOS MÉTRICOS GERAIS

Nesta seção introduziremos o conceito de espaços métricos gerais, cf. [1]. Estes são espaços “quase-métricos", isto é, quais são possíveis obter uma métrica não satisfazendo o axioma da simetria. Esta ausência permite-nos a introdução de uma ordem parcial, e com isso faremos o primeiro passo de aproximar ordens parciais aos espaços métricos.

Um conjunto X é dito um *espaço métrico geral* ou *gms* quando munido de uma aplicação $X(-,-) : X \times X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ que satisfaz:

i) $X(x, x) = 0$, para todo $x \in X$
ii) $X(x, z) \leq X(x, y) + X(y, z)$ (*Desigualdade triangular*)
iii) Se $X(x, y) = 0$ e $X(y, x) = 0$, então $x = y$ (*Simetria fraca*)

Neste caso diremos que $X(-,-)$ é uma *quase-métrica* em X.

Para simplificar a notação, denotaremos $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, \infty]$. Se tivermos uma ordem parcial $(P, \leq)$, podemos induzir uma quase-métrica por:

$$P(x,y)=\begin{cases}0 & \text{se } x\leq y\\ \infty & \text{caso contrário}\end{cases}$$

Reciprocamente, se X é espaço métrico geral podemos induzir uma ordem parcial $(X,\leq_X)$ por $x\leq_X y$ se, e somente se, $X(x,y)=0$. Assim as ordens $\leq$ e $\leq_P$ coincidem.
O próprio conjunto $[0,\infty]$ é espaço métrico geral, munido da quase-métrica:

$$[0,\infty](x,y)=y\dot{-}x=\begin{cases}0 & \text{se } x\geq y\\ y-x & \text{se } x<y\end{cases}$$

Como usual, temos $x+\infty=\infty+x=\infty$, para todo $x\in[0,\infty]$. Observe que a ordem usual de $\mathbb{R}$ não coincide com a ordem induzida por $[0,\infty](-,-)$, temos $x\leq_{[0,\infty]} y$ se, e somente se, $y\leq x$.

Para X,Y espaços métricos gerais, uma função $f:X\to Y$ é dita *não-expansiva* se tivermos sempre $Y(f(x),f(y))\leq X(x,y)$, $\forall x,y\in X$. Não é difícil de demonstrar que toda função f que é não-expansiva também preserva ordem com respeito a $\leq_X$. Observe que a composição de funções não-expansivas é novamente uma função não-expansiva, como também a identidade é uma função não-expansiva. Com isso obtemos a seguinte

Definição 1. *A classe* $\mathbf{Gms}$*, cujos objetos são dados por espaços métricos gerais e cujos morfismos são funções não-expansivas, é dita a categoria dos espaços métricos gerais.*

Existe uma noção de dualidade na teoria dos espaços métricos gerais que estende a noção de dualidade presente na teoria das ordens parciais: dado X espaço métrico geral podemos obter uma quase-métrica dual definida por $X^{op}(x,y)=X(y,x)$, quaisquer que sejam $x,y\in X$. Dizemos que X^{op} é o espaço métrico geral dual a X. Note que nem todo espaço métrico geral provém de alguma ordem parcial.

2.1. **Sequências de Cauchy e limites.** Como em espaços métricos gerais vale apenas uma versão parcial do axioma da simetria, o “nosso mundo"fica maior. Neste caso temos duas noções de sequências de Cauchy.
Dizemos que uma rede $(x_i)_{i\in I}$ em X é *Cauchy à direita* se:

$$\forall\epsilon>0,\exists\, N\in I;\ \forall i\geq j\geq N\ \Rightarrow\ X(x_j,x_i)<\epsilon$$

De modo análogo uma rede $(x_i)_{i\in I}$ em X é dita *Cauchy à esquerda* se:

$$\forall\epsilon>0,\exists\, N\in\mathbb{N};\ \forall i\geq j\geq N\ \Rightarrow\ X(x_i,x_j)<\epsilon$$

Claramente sendo X espaço métrico usual, as duas noções de sequências de Cauchy coincidem. Vale observar que se X é ordem parcial decorre da definição que para $(x_i)_{i\in I}$ Cauchy à direita, levando em consideração a quase-métrica induzida, podemos obter $N\in I$ de modo que para todo $i\geq j\geq N$ tenha-se $x_j\leq x_i$. Assim em um dado momento $(x_i)_{i\in I}$ é cadeia, então fará sentido se perguntar o limite $\bigsqcup x_i$.

A seguinte proposição nos permitirá verificar o comportamento de uma rede de Cauchy quando induzidas à $[0,\infty]$.

Proposição 4. *Sejam X espaço métrico geral e* $(x_i)_{i\in I}$ *uma sequência de Cauchy à direita em* X*. Então dado* $x\in X$*:*

(1) *A rede* $(X(x,x_i))_{i\in I}$ *é Cauchy à direita em* $[0,\infty]$.

(2) *A rede* $(X(x_i, x))_{i\in I}$ *é Cauchy à esquerda em* $[0, \infty]$.

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, tome $N \in I$ tal que $\forall i \geq j \geq N$ tenha-se $X(x_j, x_i) < \epsilon$. Assim em virtude da desigualdade triangular segue que:

(1) $[0, \infty](X(x, x_j), X(x, x_i)) = X(x, x_i) - X(x, x_j) \leq X(x_j, x_i) < \epsilon$
(2) $[0, \infty](X(x_i, x), X(x_j, x)) = X(x_j, x) - X(x_i, x) \leq X(x_j, x_i) < \epsilon$

Logo $(X(x, x_i))_{i\in I}$ é Cauchy à direita e $(X(x_i, x))_{i\in I}$ é Cauchy à esquerda em $[0, \infty]$.
■ □

A fim de introduzir limites de redes de Cauchy para espaços métricos gerais, antes se faz necessário definir este conceito em $[0, \infty]$.
Para $(r_i)_{i\in I}$ Cauchy à direita em $[0, \infty]$, definimos o *limite à direita* de (r_i) por:

$$\lim_{\rightarrow} r_i = \sup_{i\in I} \inf_{j\geq i} r_j$$

Analogamente, se $(r_i)_{i\in I}$ é Cauchy à esquerda em $[0, \infty]$ o seu *limite à esquerda* é definido por:

$$\lim_{\leftarrow} r_i = \inf_{i\in I} \sup_{j\geq i} r_j$$

Conforme a definição, poderemos a partir da proposição seguinte estabelecer relação entre limites à direita e à esquerda em $[0, \infty]$. Temos a seguinte proposição cuja demonstração consta em [7].

Proposição 5. *Seja* $(r_i)_{i\in I}$ *Cauchy à direita em* $[0, \infty]$. *Então para todo* $r \in [0, \infty]$ *vale:*

$i)$ $[0, \infty](r, \lim\limits_{\rightarrow} r_i) = \lim\limits_{\rightarrow} [0, \infty](r, r_i)$

$ii)$ $[0, \infty](\lim\limits_{\rightarrow} r_i, r) = \lim\limits_{\leftarrow} [0, \infty](r_i, r)$

Se (r_i) *é Cauchy à esquerda em* $[0, \infty]$ *então vale:*

$iii)$ $[0, \infty](r, \lim\limits_{\leftarrow} r_i) = \lim\limits_{\leftarrow} [0, \infty](r, r_i)$

$iv)$ $[0, \infty](\lim\limits_{\leftarrow} r_i, r) = \lim\limits_{\rightarrow} [0, \infty](r_i, r)$

Para a demonstração desta proposição será feito uso do seguinte lema, qual também utilizamos na demonstração de um dos teoremas principais (vide 4).

Lema 1. *Sejam* $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $-A = \{-x;\ x \in A\}$ *e* $A + B = \{x + y;\ x \in A \text{ e } y \in B\}$. *Valem as seguintes afirmativas:*

(1) *Se* A *é limitado inferiormente, então* $\sup(-A) = -\inf A$
(2) *Se* A *é limitado superiormente, então* $\inf(-A) = -\sup A$
(3) *Se* A *e* B *são limitados, então* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ *e* $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$

■

Em virtude das proposições 4 e 5 podemos definir o limite de uma rede em um espaço métrico geral X. Para $(x_i)_{i\in I}$ Cauchy à direita em um espaço métrico geral X, dizemos que $x \in X$ é um *limite à direita* da rede $(x_i)_{i\in I}$ quando vale:

$$\begin{aligned} x = \lim_{\rightarrow} x_i \text{ se, e somente se,} \\ \forall\, y \in X,\ X(x,y) = \lim_{\leftarrow} X(x_i,y)\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Observe que esta definição coincide com os limites definidos em $[0,\infty]$, em virtude de 5 e está bem definido conforme 4. Vale ressaltar que este limite, caso exista, está unicamente determinado em virtude da simetria fraca. Sem a simetria fraca apenas poderíamos concluir que os limites possuem distância 0.

Se X é ordem parcial e $(x_i)_{i\in I}$ é cadeia, então

$$\lim_{\rightarrow} x_n = \bigsqcup x_n\,.$$

De fato, seja y tal que $x_i \leq y$ para todo $i \in I$. Logo $X(x_i,y) = 0$, $\forall i \in I$. Por outro lado, $X(\lim_{\rightarrow} x_i, y) = \lim_{\leftarrow} X(x_i,y) = 0$. Assim, $\lim_{\rightarrow} x_i \leq y$ e, portanto, $\lim_{\rightarrow} x_i = \bigsqcup x_i$. Além disso, essa definição coincide com a usual de espaços métricos. De fato, seja $\epsilon > 0$ dado, observe que:

$$\begin{aligned} & x = \lim_{\rightarrow} x_i \ \Rightarrow \\ & 0 = X(\lim_{\rightarrow} x_i, x) = \lim_{\leftarrow} X(x_i,x) = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(x_i,x) < \epsilon \end{aligned}$$

Logo, poderemos obter $N \in I$ de modo que $0 \leq \sup_{j\geq N} X(x_j,x) < \epsilon$. Portanto $X(x_i,x) < \epsilon$, $\forall i \geq N$.

2.2. **O mergulho de Yoneda.** O mergulho de Yoneda pode ser pensado como uma "representação"da categoria $\mathbf{Gms}$ na categoria de funtores com valores em conjuntos e transformações naturais. Por exemplo, o teorema de Cayley da teoria dos Grupos diz que todo grupo G é imerso no grupo das simetrias, ou seja, qualquer grupo G é isomorfo a um subgrupo do grupo das simetrias. Então o mergulho de Yoneda neste caso induz o monomorfismo de grupo, $G \to S_G$, onde S_G denota o grupo das permutações de G.

Em posse dos conceitos introduzidos estamos em condições de formular o Lema de Yoneda, cf. [6] e [4], um resultado importante na Teoria das Categorias. Para nossos fins, nos restringiremos à categoria $\mathbf{Gms}$. Para isto consideremos o conjunto $\widehat{X} = \{f : X^{op} \to [0,\infty]; f \text{ é não-expansiva}\}$. Munindo-o com a quase métrica $\widehat{X}(\phi,\psi) = \sup_{z\in X}[0,\infty](\phi(z),\psi(z))$ temos que $\widehat{X}$ é um espaço métrico geral. A seguinte proposição nos permitirá identificar X em $\widehat{X}$. Com isso daremos mais um passo ao objetivo de aproximar os dois teoremas de ponto fixo.

Lema 2 (Yoneda)**.** *Seja X um espaço métrico geral. Para cada $x \in X$ defina a função $X(-,x) : X^{op} \to [0,\infty]$, $y \mapsto X(y,x)$. Esta função é não-expansiva e portanto um elemento de $\widehat{X}$. Além disto, para qualquer elemento $\phi \in \widehat{X}$, tem-se $\widehat{X}(X(-,x),\phi) = \phi(x)$.*

Demonstração. Primeiramente, $X(-,x)$ é não-expansiva, pois para todo $a, b \in X$, considerando sem perda de generalidade $X(a,x) < X(b,x)$, tem-se:

$$\begin{aligned}[0,\infty](X(a,x),X(b,x)) &= X(b,x) - X(a,x) \\ &\leq X(b,a) = X^{op}(a,b)\,.\end{aligned}$$

Agora tome $\phi \in \widehat{X}$. Teremos:

$$\begin{aligned}\phi(x) &= [0,\infty](X(x,x),\phi(x)) \\ &\leq \sup_{z\in X}[0,\infty](X(z,x),\phi(z)) = \widehat{X}(X(-,x),\phi)\end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que ϕ é não-expansiva tem-se para qualquer $y \in X$:

$$[0,\infty](\phi(x),\phi(y)) \leq X^{op}(x,y) = X(y,x)$$

Vamos mostrar que para qualquer $y \in X$ tem-se $[0,\infty](X(y,x),\phi(y)) \leq \phi(x)$. Para isto considere os seguintes casos:

i) $X(y,x) = \infty$
Neste caso $[0,\infty](X(y,x),\phi(y)) = 0 \leq \phi(x)$.

ii) $X(y,x) < \infty$ e $\phi(x) = \infty$
De imediato $[0,\infty](X(y,x),\phi(y)) \leq \phi(x)$.

iii) $X(y,x) < \infty$ e $\phi(x) < \infty$
Como $[0,\infty](\phi(x),\phi(y)) \leq X(y,x)$ teremos $\phi(y) < \infty$, assim $\phi(y) - \phi(x) \leq [0,\infty](\phi(x),\phi(y)) \leq X(y,x)$ e portanto $\phi(y) - X(y,x) \leq \phi(x)$. Logo, independente da relação da ordenação de $\phi(y)$ e $X(y,x)$, segue que $[0,\infty](X(y,x),\phi(y)) \leq \phi(x)$.

Portanto em qualquer dos casos vale a desigualdade, uma vez que $y \in X$ é arbitrário segue que:

$$\phi(x) \geq \sup_{y\in X}[0,\infty](X(y,x),\phi(y)) = \widehat{X}(X(-,x),\phi)$$

Logo, $\phi(x) = \widehat{X}(X(-,x),\phi)$. □

Corolário 1. *Seja X espaço métrico geral. Para cada $x \in X$, defina o **mergulho de Yoneda** por $\mathbf{y} : X \hookrightarrow \widehat{X}$, $x \mapsto \mathbf{y}_x = X(-,x)$. Para todo $x, x' \in X$ tem-se que $\mathbf{y}$ é uma isometria, isto é, $X(x,x') = \widehat{X}(\mathbf{y}_x, \mathbf{y}_{x'})$.*

Demonstração. A isometria é imediata a 2. Se $\mathbf{y}_x = \mathbf{y}_{x'}$, temos $0 = \widehat{X}(\mathbf{y}_x,\mathbf{y}_{x'}) = X(x,x')$ e $0 = \widehat{X}(\mathbf{y}_{x'},\mathbf{y}_x) = X(x',x)$. Assim, em virtude da simetria fraca, segue que $x = x'$ e portanto $\mathbf{y}$ é injetiva. ■ □

À luz do lema anterior podemos a partir de agora identificar qualquer espaço métrico geral X em um “maior", $\widehat{X}$. Através da seguinte proposição, estaremos em condições de identificar as funções não-expansivas.

Proposição 6. *Sejam X, Y espaços métricos gerais e $f : X \to Y$ não-expansiva. Defina $f^* : \widehat{X} \to \widehat{Y}$ por $f^*(\phi)(y) = \inf_{x\in X}(\phi(x) + Y(y, f(x)))$. Neste caso, f^* é não-expansiva.*

Demonstração. Sejam $\phi, \psi \in \widehat{X}$, teremos:

$$\begin{aligned}
&\widehat{X}(\phi,\psi) + f^*(\phi)(y) \\
&\qquad = \sup_{x\in X}[0,\infty](\phi,\psi) + \inf_{x\in X}(\phi(x) + Y(y,f(x))) \\
&\qquad \geq \inf_{x\in X}(\psi(x)\dot{-}\phi(x)) + \inf_{x\in X}(\phi(x) + Y(y,f(x))) \\
&\qquad \geq \inf_{x\in X}(\psi(x) + Y(y,f(x))) = f^*(\psi)(y)\,.
\end{aligned}$$

Logo, $\widehat{X}(\phi,\psi) \geq f^*(\psi)(y) - f^*(\phi)(y)$. Se $f^*(\psi)(y) > f^*(\phi)(y)$ teremos $\widehat{X}(\phi,\psi) \geq [0,\infty](\phi(y),\psi(y))$, caso contrário $\widehat{X}(\phi,\psi) \geq 0 = [0,\infty](\phi(y),\psi(y))$. Em qualquer caso teremos

$$\widehat{X}(\phi,\psi) \geq [0,\infty](\phi(y),\psi(y))$$

e, assim,

$$\widehat{X}(\phi,\psi) \geq \sup_{y\in X}[0,\infty](\phi(y),\psi(y))\,.$$

Segue que $\widehat{X}(\phi,\psi) \geq \widehat{Y}(f^*(\phi), f^*(\psi))$. □

3. Completamento de espaços métricos gerais

Em posse dos resultados obtidos anteriormente, podemos a partir deste momento considerar completude em espaços métricos gerais. A completude tem papel de unificar, em um certo sentido, os dois teoremas de ponto fixo. Dizemos que um funtor $\mathcal{J} : \mathbf{Gms} \to \mathbf{Gms}$ é um *funtor completamento* caso satisfaça as seguintes propriedades:

i) $\mathcal{J}X \subseteq \widehat{X}$, qualquer que seja X gms;
ii) $\{\mathbf{y}_x; x \in X\} \subseteq \mathcal{J}X$;
iii) Quaisquer que sejam X, Y gms, se $f : Y \to X$ é uma função não-expansiva, então $\mathcal{J}(f) := f^*_{|\mathcal{J}Y}$ satisfaz $f^*_{|\mathcal{J}Y}(\mathcal{J}Y) \subseteq \mathcal{J}X$, isto é, $f^*_{|\mathcal{J}Y} : \mathcal{J}Y \to \mathcal{J}X$ está bem definida.

Note que em virtude de i) e ii) obtemos uma regra para os $\mathbf{Gms}$-objetos, a qual esta determina uma margem para o completamento. A alínea iii) define uma regra para os $\mathbf{Gms}$-morfismos, que garante que qualquer função não-expansiva admite uma extensão que ainda é não-expansiva. Em virtude da proposição 6 segue que $\mathcal{J}$ é funtor covariante.

Seja X espaço métrico geral, dizemos que $\phi \in \widehat{X}$ possui *supremo* $\mathcal{S}(\phi) \in X$ quando para todo $x \in X$ satisfaça a seguinte igualdade:

$$X(\mathcal{S}(\phi), x) = \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_x) \tag{2}$$

Observe que o supremo $\mathcal{S}(\phi)$ por simetria fraca é único. Caso qualquer elemento $\phi \in \mathcal{J}X$ possua supremo, dizemos que X é *$\mathcal{J}$-completo.*

Conforme a definição acima é natural considerar $\mathcal{S}$ como uma aplicação, o seguinte lema virá em nosso auxílio neste sentido:

Lema 3. *Seja X espaço métrico geral $\mathcal{J}$-completo. Então a aplicação $\mathcal{S} : \mathcal{J}X \to X$ está bem definida e é não-expansiva. Além disso vale a seguinte desigualdade:*

$$X(x, \mathcal{S}(\phi)) \leq \widehat{X}(\mathbf{y}_x, \phi), \tag{3}$$

quaisquer que sejam $\phi \in \mathcal{J}X$ e $x \in X$.

Exemplo 1. $[0, \infty]$ é $\mathcal{J}$-completo, independente da escolha de $\mathcal{J}$. Para observar isso, dado $\phi \in \mathcal{J}[0, \infty]$ defina $\mathcal{S}(\phi) = \inf_{z\in[0,\infty]}(\phi(z) + z)$, teremos:

$$\begin{aligned}
[0, \infty](\mathcal{S}(\phi), x) &= x \dot{-} \inf_{z\in[0,\infty]}(\phi(z) + z) \\
&= \sup_{z\in[0,\infty]}(x \dot{-} (z + \phi(x))) = \sup_{z\in[0,\infty]}([0, \infty](z, x) \dot{-} \phi(z)) \\
&= \sup_{z\in[0,\infty]}[0, \infty](\phi(z), \mathbf{y}_x(z)) = \widehat{[0, \infty]}(\phi, \mathbf{y}_x)
\end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{S}$ é de fato supremo.

3.1. **Completude comum para ordens parciais e espaços métricos.** Com a noção de completude introduzida no início podemos a partir de uma escolha adequada de $\mathcal{J}$ generalizar as noções de completude usuais para espaços métricos, ordens parciais e reticulados. Neste sentido, para X espaço métrico geral, defina o funtor completamento $\mathbb{A}$ por $\phi \in \mathbb{A}X$ se, e somente se, existe $(x_i)_{i\in I}$ rede de Cauchy de modo que $\phi = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(-, x_j)$.

Proposição 7. *O funtor* $\mathbb{A} : \mathbf{Gms} \to \mathbf{Gms}$ *é de fato funtor completamento.*

Demonstração. Sejam X, Y espaços métricos gerais. Verifiquemos que $\mathbb{A}$ é funtor completamento:

i) É claro que $\mathbb{A}X \subseteq \widehat{X}$, pois se $\phi \in \mathbb{A}X$ então $\phi : X^{op} \to [0, \infty]$ está bem definida.
ii) Para cada $x \in X$, tome a rede constante $x_i = x$, para todo $i \in I$, que claramente é Cauchy a direita. Desta maneira $\mathbf{y}_x = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(-, x_j)$.
iii) Seja $f : X \to Y$ não-expansiva. Tome $\phi \in \mathbb{A}X$, então existe $(x_i)_{i\in I}$ Cauchy a direita tal que $\phi = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(-, x_j)$. Vamos mostrar que $f^*(\phi) = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(-, f(x_j))$. Ora, para todo $x_j \in (x_i)$,$y \in Y$ e $x \in X$ teremos:

$$\begin{aligned}
Y(y, f(x)) + X(x, x_j) &\geq Y(y, f(x)) + Y(f(x), f(x_j)) \\
&\geq Y(y, f(x_j)) \Rightarrow \\
\inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(x, x_j) + Y(y, f(x)) &\geq \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(y, f(x_j))
\end{aligned}$$

Como x é arbitrário segue que $f^*(\phi)(y) \geq \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(y, f(x_j))$. Para mostrar a desigualdade oposta tome $\epsilon > \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(y, f(x_j))$, para este ϵ tome $\delta_1, \delta_2 > 0$ de modo que $\delta_1 + \delta_2 < \epsilon$ e $\delta_1 > \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(y, f(x_j))$. Como δ_1 não é uma barreira inferior para $\inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(y, f(x_j))$, podemos obter $N_1 \in I$ de modo que:

$$\delta_1 > \sup_{j\geq N_1} Y(y, f(x_j)) \geq Y(y, f(x_j)),\ \forall j \geq N_1$$

Uma vez que (x_i) é Cauchy a direita podemos obter $N_2 \in I$ tal que para todo $j' \geq j \geq N_2$ tenha-se $X(x_j, x_{j'}) < \delta_2$. Assim $\phi(x_j) \leq \delta_2$, qualquer que seja $j \geq N_2$. Como I é direcionado, tomando $N \geq N_1$ e $N \geq N_2$ segue que para todo $j \geq N$:

$$\epsilon > \delta_1 + \delta_2 > Y(y, f(x_j)) + \phi(x_j) \geq f^*(\phi)(y)$$

Uma vez que ϵ foi tomado arbitrário segue que $\inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(y, f(x_j)) \geq f^*(\phi)(y)$. Portanto $f^*(\phi)(y) = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} Y(y, f(x_j))$. ■

□

Desta maneira, conforme as seguintes proposições, poderemos através do funtor $\mathbb{A}$ resgatar a completude de espaços métricos e ordens parciais.

Proposição 8. *Seja X espaço métrico. X é completo se, e somente se, X é $\mathbb{A}$-completo. Além disto, a função $\mathcal{S} : \mathbb{A}X \to X$ é isometria e vale a seguinte igualdade:*

$$X(x, \mathcal{S}(\phi)) = \widehat{X}(\mathbf{y}_x, \phi),\ \forall \phi \in \mathcal{J}X, x \in X \tag{4}$$

Demonstração. Como X é espaço métrico, podemos fazer uso da simetria quando conveniente. Suponha X completo, tome $\phi = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(-, x_j)$. Fazendo uso da proposição 3 temos que $(x_i)_{i\in I}$ converge, digamos para x. Em virtude da equação (1) teremos para todo $y \in X$:

$$\begin{aligned} X(y,x) = X(x,y) &\underbrace{=}_{(1)} \lim_{\leftarrow} X(x_i, y) \\ &= \lim_{\leftarrow} X(y, x_i) = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(y, x_j) \end{aligned}$$

Logo $\mathbf{y}_x = \phi$. Desta maneira defina $\mathcal{S}(\phi) = x$. Assim para todo $z \in X$:

$$X(\mathcal{S}(\phi), z) = X(x,z) = \widehat{X}(\mathbf{y}_x, \mathbf{y}_z) = \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_z)$$

Portanto $\mathcal{S}$ é supremo, como $\phi \in \mathbb{A}X$ foi tomado arbitrário segue que X é $\mathbb{A}$-completo. Além disso, para $\phi = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(-, x_j)$ e $\psi = \inf_{i\in I}\sup_{j\geq i} X(-, y_j)$ teremos:

$$\begin{aligned} \widehat{X}(\phi,\psi) &= \sup_{a\in X}[0,\infty](\phi(a), \psi(a)) \\ &= \sup_{a\in X}[0,\infty](\lim_{\leftarrow} X(a, x_j), \lim_{\leftarrow} X(a, y_j)) \\ &= \sup_{a\in X}[0,\infty](\lim_{\leftarrow} X(x_j, a), \lim_{\leftarrow} X(y_j, a)) \\ &= \sup_{a\in X}[0,\infty](X(\mathcal{S}(\phi), a), X(\mathcal{S}(\psi), a)) \\ &= \widehat{X}(\mathbf{y}_{\mathcal{S}(\phi)))}, \mathbf{y}_{\mathcal{S}(\psi)}) = X(\mathcal{S}(\phi), \mathcal{S}(\psi)) \end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{S} : \mathbb{A}X \to X$ é isometria e desta maneira conforme a demonstração do lema 3 segue que vale a equação (4).

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de Cauchy. Tome $\phi = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} X(-, x_n)$. Como X é $\mathbb{A}$-completo existe o supremo $\mathcal{S}(\phi)$. Assim para todo $z \in X$:

$$\begin{aligned} X(\mathcal{S}(\phi), z) &= X(z, \mathcal{S}(\phi)) \\ &\underbrace{=}_{(4)} \widehat{X}(\mathbf{y}_z, \phi) \\ &= \sup_{a\in X}[0,\infty](\mathbf{y}_z(a), \lim_{\leftarrow} X(a, x_n)) \\ &\underbrace{=}_{2.2(iii)} \sup_{a\in X} \lim_{\leftarrow}[0,\infty](\mathbf{y}_z(a), X(a, x_n)) \\ &= \lim_{\leftarrow} \sup_{a\in X}[0,\infty](\mathbf{y}_z(a), \mathbf{y}_{x_n}(a)) \\ &= \lim_{\leftarrow} \widehat{X}(\mathbf{y}_z, \mathbf{y}_{x_n}) \\ &= \lim_{\leftarrow} X(z, x_n) = \lim_{\leftarrow} X(x_n, z)\,. \end{aligned}$$

Segue da equação (1) que $\lim_{\rightarrow} x_n = \mathcal{S}(\phi)$ e, portanto, X é completo. □

Para ordens parciais podemos considerar o funtor $\widehat{(.)}X = \widehat{X}$, observe que é imediato que este funtor é de fato um funtor completamento. Conforme a seguinte proposição, esta escolha nos permitirá resgatar a completude de reticulados.

Proposição 9. *Seja X ordem parcial. X é um reticulado completo se, e somente se, X é $\widehat{(.)}$-completo.*

Demonstração. Suponha X $\widehat{(.)}$-completo. Para cada $A \subseteq X$, defina $\phi : X^{op} \to [0, \infty]$ por:

$$\phi(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in {\downarrow}A \\ \infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Uma vez que X é $\widehat{(.)}$-completo, vamos mostrar que $\bigvee {\downarrow}A = \mathcal{S}(\phi)$.
Ora, seja $x \in {\downarrow}A$, pela definição de ϕ e aplicando o Lema de Yoneda teremos $0 = \phi(x) = \widehat{X}(\mathbf{y}_x, \phi) \underbrace{\geq}_{(3)} X(x, \mathcal{S}(\phi))$. Logo $X(x, \mathcal{S}(\phi)) = 0$ e portanto $x \leq \mathcal{S}(\phi)$.
Por outro lado, se $z \in X$ é tal que $x \leq z$, qualquer que seja $x \in {\downarrow}A$, teremos:

$$X(\mathcal{S}(\phi), z) \underbrace{=}_{(2)} \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_z) = \sup_{a\in X}[0,\infty](\phi(a), X(a, z))$$

Se $a \in {\downarrow}A$, pela escolha de z temos $X(a, z) = 0$, assim $[0, \infty](\phi(a), X(a, z)) = 0$.
Por outro lado, se $a \notin {\downarrow}A$ teremos que $\phi(a) = \infty$ e portanto $[0, \infty](\phi(a), X(a, z)) = 0$.
Desta maneira, qualquer que seja $a \in X$ temos $[0, \infty](\phi(a), X(a, z)) = 0$, logo $X(\mathcal{S}(\phi), z) = 0$ e assim $\mathcal{S}(\phi) \leq z$.
Portanto concluímos que existe $\bigvee {\downarrow}A$, uma vez que $A \subseteq X$ foi tomado arbitrário segue da proposição 2 que X é reticulado completo.

Reciprocamente, suponha X reticulado completo. Para $\phi \in \widehat{X}$, tome $A = \phi^{-1}(\infty)$. Observe que $A = {\uparrow}A$, pois se $z \in {\uparrow}A$ podemos obter $h \in A$ tal que $h \leq z$, como ϕ é

não-expansiva $\phi(h) \leq \phi(z)$ e assim $\phi(z) = \infty$. Desta maneira defina $\mathcal{S}(\phi) = \bigvee X \backslash \uparrow\! A$, vamos mostrar que $\mathcal{S}$ é supremo.
Ora, para cada $x \in X$ teremos:

$$\begin{aligned} 0 = X(\mathcal{S}(\phi), x) &= X(\bigvee X \backslash \uparrow\! A, x) \\ &\Leftrightarrow X \backslash \uparrow\! A \subseteq \downarrow\!\{x\} \\ &\Leftrightarrow X \backslash \downarrow\!\{x\} \subseteq \uparrow\! A \end{aligned}$$

Se $a \in \downarrow\!\{x\}$ temos $X(a, x) = 0$, caso contrário teremos $a \in \uparrow\! A$ e assim $\phi(a) = \infty$, logo em qualquer caso teremos $[0, \infty](\phi(a), X(a, x)) = 0$. Por outro lado, se $[0, \infty](\phi(a), X(a, x)) = 0, \forall\, a \in X$, isto significa que sempre $X(a, x) \leq \phi(a)$, em particular para $a \notin \downarrow\!\{x\}$ valerá $X(a, x) = \infty$ e assim $\phi(a) = \infty$. Desta maneira, teremos:

$$\begin{aligned} X \backslash \downarrow\!\{x\} \subseteq \uparrow\! A &\Leftrightarrow [0, \infty](\phi(a), X(a, x)) = 0, \forall\, a \in X \\ &\Leftrightarrow \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_x) = 0\,. \end{aligned}$$

Logo $X(\mathcal{S}(\phi), x) = 0 \Leftrightarrow \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_x) = 0$, qualquer que seja $x \in X$. Como X é ordem parcial $X(-,-)$ só assume valores 0 e ∞, desta maneira $X(\mathcal{S}(\phi), x) = \infty \Leftrightarrow \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_x) \neq 0$, mas neste caso podemos obter $a \in X$ de modo que $\mathbf{y}_x(a) - \phi(a) \neq 0$, novamente levando em consideração que X é ordem parcial terá que ocorrer $\mathbf{y}_x(a) - \phi(a) = \infty$ e assim $X(\mathcal{S}(\phi), x) = \infty \Leftrightarrow \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_x) = \infty$. Assim $X(\mathcal{S}(\phi), x) = \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_x)$, qualquer que seja $x \in X$. Uma vez que ϕ foi tomado arbitrário segue que $\mathcal{S}$ é supremo.

■ □

Nesta linha de raciocínio temos também a caracterização de dcpo's com $\perp$ através de ordens $\mathbb{A}$-completas, conforme a próxima proposição, cuja demonstração consta em [7].

Proposição 10. *Seja X uma ordem parcial. Então X é dcpo com $\perp$ se, e somente se, X é $\mathbb{A}$-completo.* ■

3.2. **Funtores completamento admissíveis.** Finalmente, conforme a noção de completude introduzida no capítulo anterior, dado um espaço métrico geral X podemos nos questionar a completude de conjuntos direcionados com respeito à ordem $\leq_X$ herdada da métrica de X. Neste caminho, dizemos que um funtor completamento $\mathcal{J}$ é *admissível* se para qualquer que seja X espaço métrico geral $\mathcal{J}$-completo, tenha-se $(X, \leq_X)$ é dcpo.

Exemplo 2. Para X espaço métrico geral, considere o funtor $\mathbb{Y}X = \{\mathbf{y}_x;\ x \in X\}$. Observe que $\mathbb{Y}$ é funtor completamento pois:

$$f^*(X(-, z)) = \inf_{x \in X}(X(x, z) + Y(-, f(x))) = Y(-, f(z))$$

Definindo $\mathcal{S}(\mathbf{y}_z) = z$, qualquer que seja $z \in X$, em virtude do Lema de Yoneda teremos que X é $\mathbb{Y}$-completo. Em particular, tomando $X = \mathbb{N}$ e considerando a ordem usual, teremos que $\mathbb{N}$ é $\mathbb{Y}$-completo, mas não é dcpo. Logo $\mathbb{Y}$ não é admissível.

O funtor anterior conforme mostrado não é admissível. Para nosso auxílio, conforme as seguintes proposições, vamos verificar que tanto $\mathbb{A}$ quanto $\widehat{(.)}$ são admissíveis.

Proposição 11. *O funtor $\mathbb{A}$ é admissível.*

Demonstração. Sejam X espaço métrico geral $\mathbb{A}$-completo e $I \subseteq X$ direcionado com respeito a $\leq_X$. Defina $x_i = i, i \in I$, observe que $(x_i)_{i\in I}$ é rede de Cauchy à direita. Para esta rede tome $\phi = \inf_{i\in I} \sup_{j\geq i} X(-, x_j)$, uma vez que X é $\mathbb{A}$-completo existe $\mathcal{S}(\phi)$. Vamos mostrar que $\bigsqcup I = \mathcal{S}(\phi)$.

Seja $k \in I$, temos $\phi(x_k) \leq \sup_{j\geq k} X(x_k, x_j) = 0$. Logo pelos lemas de Yoneda e (3.1) temos $0 = \phi(x_k) = \widehat{X}(\mathbf{y}_{x_k}, \phi) \geq X(x_k, \mathcal{S}(\phi))$, assim $x_k \leq_X \mathcal{S}(\phi)$. Se $u \in X$ é tal que $x_i \leq_X u$, qualquer que seja $i \in I$, teremos $X(x_i, u) = 0$ e assim:

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\rightarrow} X(x_i, u)\\
&= \lim_{\rightarrow} \widehat{X}(\mathbf{y}_{x_i}, \mathbf{y}_u)\\
&= \lim_{\rightarrow} \sup_{a\in X} [0,\infty](\mathbf{y}_{x_i}(a), \mathbf{y}_u)(a)\\
&= \sup_{a\in X} \lim_{\rightarrow} [0,\infty](\mathbf{y}_{x_i}(a), \mathbf{y}_u(a))\\
&\underbrace{=}_{(2.2)(iv)} \sup_{a\in X} [0,\infty](\lim_{\leftarrow} \mathbf{y}_{x_i}(a), \mathbf{y}_u(a))\\
&= \widehat{X}(\phi, \mathbf{y}_u)\\
&= X(\mathcal{S}(\phi), u)
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{S}(\phi) \leq_X u$. ■ □

Proposição 12. *Seja X espaço métrico geral $\widehat{(.)}$-completo, então $(X, \leq_X)$ é reticulado completo. Em particular $\widehat{(.)}$ é admissível.*

Demonstração. Primeiramente observe que $\widehat{X}$ é um reticulado completo com respeito a $\leq_{\widehat{X}}$, para observar isto, dado $Y \subseteq \widehat{X}$ tome $\bigvee Y(x) = \bigvee\{\phi(a), \phi \in Y \;\&\; a \in [0,\infty]\}$, para todo $x \in [0,\infty]$. Desta maneira $\bigvee Y$ é não-expansiva, já que é constante e é a maior das barreiras superiores com respeito a $\leq_{\widehat{X}}$. Além disso $\perp_{\widehat{X}}(a) = \infty$, para todo $a \in [0,\infty]$, é o menor elemento de $\widehat{X}$ e assim $\perp_{\widehat{X}} \in \widehat{X}$. Vamos mostrar agora que $(X, \leq_X)$ é reticulado completo.

Seja $A \subseteq X$, defina $\mathbf{y}_{[A]} = \{\mathbf{y}_a;\; a \in A\}$, verifiquemos que $\mathcal{S}(\bigvee_{\widehat{X}} \mathbf{y}_{[A]})$ é supremo de A. Dado $a \in A$, temos $\mathbf{y}_a \leq_{\widehat{X}} \bigvee_{\widehat{X}} \mathbf{y}_{[A]}$, uma vez que $\mathcal{S}$ é não-expansiva teremos $a = \mathcal{S}(\mathbf{y}_a) \leq_X \mathcal{S}(\bigvee_{\widehat{X}} \mathbf{y}_{[A]})$. Por outro lado, se $u \in X$ é tal que $a \leq_X u$, para todo $a \in A$, em virtude da isometria de $\mathbf{y}$ teremos $\mathbf{y}_a \leq_{\widehat{X}} \mathbf{y}_u$ e assim $\bigvee_{\widehat{X}} \mathbf{y}_{[A]} \leq_{\widehat{X}} \mathbf{y}_u$, portanto segue que $\mathcal{S}(\bigvee_{\widehat{X}} \mathbf{y}_{[A]}) \leq_X \mathcal{S}(\mathbf{y}_u) = u$. Conforme observado anteriormente temos que $\perp_{\widehat{X}}$ é o menor elemento de $\widehat{X}$, como $\mathcal{S}$ é não-expansiva segue que $\mathcal{S}(\perp_{\widehat{X}})$ é o menor elemento de X. ■ □

4. Teoremas de ponto fixo

Dado um conjunto X e uma aplicação $f : X \to X$, podemos nos questionar a existência de pontos $x \in X$ tais que $f(x) = x$, quais são ditos *pontos fixos*. Para espaços métricos e ordens parciais são bem conhecidos os teoremas de ponto fixo de Banach e Knaster-Tarski, conforme enunciado:

Teorema 1 (Banach). *Seja X espaço métrico completo. Se $f : X \to X$ é uma contração, isto é, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$, quaisquer que sejam $x, y \in X$. Então f tem um único ponto fixo.* ■

Teorema 2 (Knaster-Tarski). *Seja X um reticulado completo. Se $f : X \to X$ preserva ordem, então f tem menor e maior ponto fixo. Além disso, o conjunto de seus pontos fixos formam um reticulado completo por si.* ■

Nas próximas seções vamos mostrar que ambos teoremas poderão ser deduzidos da teoria sobre espaços métricos gerais introduzida até então por meio das proposições 4 e 13 exibidas a seguir. Mais precisamente, vamos verificar que ambos são consequências do teorema sobre a existência de pontos fixos para dcpo's, cf. 3. Para funtores completamento admissíveis podemos demonstrar que a função $f : X \to X$ possui pontos fixos se a função extensão $f^* : \widehat{X} \to \widehat{X}$ tem pontos fixos, cf. 4. Através do teorema 13 demonstraremos que a condição suficiente para f^* ter de fato um ponto fixo é que para algum $x_0 \in X$ a sequência $(f^n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ seja de Cauchy à direita. Em posse destes resultados será possível concluir os teoremas de Banach e Knaster-Tarski sem maiores dificuldades.

4.1. **A demonstração de Pataraia.** Conforme é conhecido para ordens parciais, pelo teorema (4.15) em [2], dado X dcpo com $\perp$ e $f : X \to X$ preservando ordem é possível obter ponto fixo para f. D. Pataraia desenvolveu uma demonstração intuicionista elegante deste teorema. Em [3], a demonstração é indicada como exercício nas páginas 20 e 21. Em [8], esta demonstração também é indicada e em [7] a demonstração é elaborada em todos os detalhes.

Teorema 3. *Seja $(X, \leq)$ dcpo com $\perp$ e suponha que $f : X \to X$ preserva ordem. Então f tem menor ponto fixo.* ■

A demonstração do seguinte teorema é análoga ao anterior.

Teorema 4.3 (bis). *Seja $(X, \leq)$ dcpo e $f : X \to X$. Suponha que f preserva ordem e existe $x^* \in X$ tal que $x^* \leq f(x^*)$. Então f tem ponto fixo, qual é o menor acima de x^*.* ■

Fazendo uso do Teorema 3 (bis), obteremos o seguinte teorema para espaços métricos gerais, cujas hipóteses permitirão obter os teoremas do ponto fixo de Banach e Knaster-Tarski.

Teorema 4. *Sejam $\mathcal{J}$ admissível, X espaço métrico geral $\mathcal{J}$-completo e $f : X \to X$ não-expansiva. Se existe $\phi \in \mathcal{J}X$ tal que $f^*(\phi) = \phi$, então f tem ponto fixo, qual é o menor acima de $\mathcal{S}(\phi)$ com respeito a $\leq_X$.*

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{J}X$ tal que $f^*(\phi) = \phi$, uma vez que X é $\mathcal{J}$-completo, existe $\mathcal{S}(\phi)$. Desta maneira temos que:

$$\begin{aligned}
X(\mathcal{S}(f^*(\phi)), f(\mathcal{S}(\phi))) &= \widehat{X}(f^*(\phi), \mathbf{y}_{f(\mathcal{S}(\phi))}) \\
&= \sup_{a\in X}[\mathbf{y}_{f(\mathcal{S}(\phi))}(a) \dot{-} f^*(\phi(a))] \\
&= \sup_{a\in X}[\mathbf{y}_{f(\mathcal{S}(\phi))} \dot{-} \inf_{b\in X}(\phi(b) + X(a, f(b)))] \\
&= \sup_{a\in X}[\sup_{b\in X}(X(a, f(\mathcal{S}(\phi))) \dot{-} (\phi(b) + X(a, f(b))))][\text{Lema } 1] \\
&\leq \sup_{a\in X}\sup_{b\in X}[X(f(b), f(\mathcal{S}(\phi))) \dot{-} \phi(b)][\text{Desig. Triangular}] \\
&\leq \sup_{b\in X}[X(b, \mathcal{S}(\phi)) \dot{-} \phi(b)][f \text{ não-expansiva}] \\
&= \sup_{b\in X}[X(b, \mathcal{S}(\phi)) \dot{-} \widehat{X}(\mathbf{y}_b, \phi)][\text{Lema de Yoneda}] \\
&\leq \sup_{b\in X}[X(b, \mathcal{S}(\phi)) \dot{-} X(b, \mathcal{S}(\phi))] \\
&= 0[\text{Lema } 3]
\end{aligned}$$

Logo, $X(\mathcal{S}(f^*(\phi)), f(\mathcal{S}(\phi))) = 0$ e, portanto, $\mathcal{S}(f^*(\phi)) \leq_X f(\mathcal{S}(\phi))$. Por hipótese, $\mathcal{J}$ é admissível, assim $(X, \leq_X)$ é dcpo, uma vez que f é não-expansiva e $f^*(\phi) = \phi$ temos que f preserva ordem com respeito a $\leq_X$ e $\mathcal{S}(\phi) \leq_X f(\mathcal{S}(\phi))$. Aplicando o teorema 3 bis segue que f tem ponto fixo, qual é o menor acima de $\mathcal{S}(\phi)$ com respeito a $\leq_X$. ■ □

4.2. **Os teoremas de Banach e Knaster-Tarski para espaços métricos gerais.** Conforme as hipóteses do teorema anterior, para a obtenção de pontos fixos para uma função f é suficiente a existência destes para f^*. Neste caminho a seguinte proposição virá em auxílio:

Proposição 13. *Sejam X espaço métrico geral e $f : X \to X$ não-expansiva. Se para algum $x_0 \in X$ a sequência $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy à direita, então $\phi = \inf_{n\in N}\sup_{k\geq n} X(-, f^k(x_0))$ é um ponto fixo para f^*.*

Demonstração. Para mostrar a igualdade $f^*(\phi) = \phi$, vamos verificar ambas desigualdades com respeito a $\leq_{\widehat{X}}$.

Sejam $n \in \mathbb{N}$, $z \in X$ e $\epsilon > 0$ fixados. Uma vez que $(f^n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é Cauchy à direita, tome $m \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $k \geq m \geq n$ tenha-se $X(f^m(x_0), f^k(x_0)) < \epsilon$. Assim $\sup_{k\geq m} X(f^m(x_0), f^k(x_0)) \leq \epsilon$. Logo teremos:

$$\begin{aligned}
\sup_{k\geq n} X(z, f^k(x_0)) + \epsilon &\geq \sup_{k\geq m} X(z, f^k(x_0)) + \epsilon \\
&\geq X(z, f^{m+1}(x_0)) + \sup_{k\geq m} X(f^m(x_0), f^k(x_0)) \\
&\geq \inf_{a\in X}[X(z, f(a)) + \sup_{k\geq m} X(a, f^k(x_0))] \\
&\geq \inf_{a\in X}[X(z, f(a)) + \inf_{m\in N}\sup_{k\geq m} X(a, f^k(x_0))] \\
&= f^*(\phi)(z)\,.
\end{aligned}$$

Uma vez que $\epsilon > 0$ foi tomado arbitrário, teremos $f^*(\phi)(z) \leq \sup_{k \geq n} X(z, f^k(x_0))$. Como $n \in \mathbb{N}$ foi tomado arbitrário obtemos $f^*(\phi)(z) \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} X(z, f^k(x_0)) = \phi(z)$. Logo $f^*(\phi)(z) - \phi(z) \leq 0$, uma vez que a escolha de $z \in X$ foi arbitrária segue que $\sup_{z\in X}[f^*(\phi)(z) - \phi(z)] \leq 0$ e assim $\widehat{X}(\phi, f^*(\phi)) = 0$. Portanto $\phi \leq_{\widehat{X}} f^*(\phi)$.

Para mostrar a desigualdade oposta, sejam $y, z \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados. Tome $k \geq n$, uma vez que f é não-expansiva teremos:

$$
\begin{aligned}
&X(y, f(z)) + X(z, f^k(x_0)) \\
&\quad \geq X(y, f(z)) + X(f(z), f^{k+1}(x_0)) \\
&\quad \geq X(y, f^{k+1}(x_0)).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$X(y, f(z)) + \sup_{k\geq n} X(z, f^k(x_0)) \geq \sup_{k\geq n} X(y, f^{k+1}(x_0))\,.$$

Como n foi tomado arbitrário, vale

$$
\begin{aligned}
X(y, f(z)) &+ \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} X(z, f^k(x_0)) \\
&\geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{k\geq n} X(y, f^{k+1}(x_0))
\end{aligned}
$$

e, assim, $X(y, f(z)) + \phi(z) \geq \phi(y)$. Uma vez que z foi tomado arbitrário, teremos $\inf_{z\in X}[X(y, f(z) + \phi(z))] \geq \phi(y)$ e, assim, $f^*(\phi)(y) \geq \phi(y)$. Como y foi tomado arbitrário segue que $f^*(\phi) \leq_{\widehat{X}} \phi$. $\square$

Em virtude do Teorema 4 e fazendo uso da proposição anterior, estaremos em condições de demonstrar os teoremas de Banach e Knaster-Tarski, cujas hipóteses tomadas em espaços métricos gerais coincidem com as hipóteses dos teoremas originais, em virtude das proposições 8, 9, 11 e 12.

Teorema 5 (Banach)**.** *Sejam X espaço métrico geral $\mathbb{A}$-completo e $f : X \to X$ contração, isto é, existe $0 < \lambda < 1$ tal que $X(x, y) \leq \lambda.X(f(x), f(y)) < \infty$, para todo $x, y \in X$. Então f tem um único ponto fixo.*

Demonstração. Seja $x_0 \in X$, vamos mostrar que $f^n(x_0)$ é Cauchy à direita. Ora, para cada $p \in \mathbb{N}$ teremos

$$\begin{aligned} X(f^n(x_0), f^{n+p}(x_0)) &\leq \sum_{i=0}^{p-1} X(f^{n+i}(x_0), f^{n+i+1}(x_0)) \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{n+i} X(x_0, f(x_0)) \\ &= \lambda^n X(x_0, f(x_0)) \sum_{i=0}^{p-1} \lambda^i \\ &< \lambda^n . X(x_0, f(x_0)) \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \\ &= \frac{\lambda^n}{1-\lambda} X(x_0, f(x_0)) \, . \end{aligned}$$

Uma vez que $0 < \lambda < 1$ temos que $\frac{\lambda^n}{1-\lambda} X(x_0, f(x_0)) \to 0$, assim dado $\epsilon > 0$ podemos tomar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq n_0$ tenha-se $X(f^n(x_0), f^{n+p}(x_0)) < \epsilon$. Como $p \in \mathbb{N}$ foi tomado arbitrário segue que $X(f^n(x_0), f^m(x_0)) < \epsilon$, para todo $m \geq n \geq n_0$. Portanto $f^n(x_0)$ é Cauchy à direita.

Desta maneira, pela proposição 13 $\phi = \inf_{n \in N} \sup_{k \geq n} X(-, f^k(x_0))$ é um ponto fixo para f^*, qual pertence a $\mathbb{A}X$. Pela proposição 11 temos que o funtor $\mathbb{A}$ é admissível, uma vez que X é $\mathbb{A}$-completo segue pelo teorema 4 que f possui ponto fixo.

Se $a, b \in X$ são pontos fixos para f, teremos $X(a,b) = X(f(a), f(b)) \leq \lambda X(a,b)$ e assim $(1-\lambda)X(a,b) \leq 0$. Como $(1-\lambda) > 0$ segue que $X(a,b) = 0$. De modo análogo $X(b,a) = 0$ e assim em virtude da simetria fraca $a = b$.

Portanto f possui um único ponto fixo. ■ □

Teorema 6 (Knaster-Tarski)**.** *Seja X espaço métrico geral $\widehat{(.)}$-completo. Se $f : X \to X$ é não-expansiva, então f tem menor e maior ponto fixo.*

Demonstração. Por hipótese temos que X é $\widehat{(.)}$-completo, logo pela proposição 12 $(X, \leq_X)$ é um reticulado completo, desta maneira teremos que $f^n(\perp)$ é Cauchy à direita, pois como f é não-expansiva vale:

$$\perp \leq_X f(\perp) \leq_X f^2(\perp) \leq_X ... \leq_X f^n(\perp) \leq_X ...$$

E assim para qualquer $\epsilon > 0$ se $n \geq m \geq 0$ teremos $X(f^m(\perp), f^n(\perp)) = 0 < \epsilon$. Logo pela proposição 13 $\phi = \inf_{n \in N} \sup_{k \geq n} X(-, f^k(\perp))$ é ponto fixo para f^*, por 12 temos que $\widehat{(.)}$ é admissível e portanto pelo teorema 4 segue que f tem menor ponto fixo, digamos x_1, qual é o menor acima de $\mathcal{S}(\phi)$.

Por outro lado, conforme a demonstração do lema 11, temos que $\mathcal{S}(\phi) = \bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$. Se x_2 for outro ponto fixo para f, temos sempre que $\perp \leq_X x_2$, e assim como f é não-expansiva teremos $f^n(\perp) \leq_X f^n(x_2) = x_2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, daí $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp) \leq_X x_2$. Como x_1 é o menor ponto fixo de f acima de $\bigvee_{n \in \mathbb{N}} f^n(\perp)$, segue que $x_1 \leq_X x_2$. Portanto x_1 é o menor ponto fixo de f em X.

Uma vez que f é não-expansiva em X se, e somente se, é não-expansiva em X^{op} a mesma construção levará a obter o menor ponto fixo para f em X^{op}, consequentemente o maior ponto fixo para f em X. □

Referências

[1] Bonsangue, M., van Breugel, F., Rutten, J. Generalized metric spaces: completion, topology, and power domains via the Yoneda embedding *Theoretical Computer Science*. 193, p. 1-51, 1998

[2] Davey, B. A, Priesley H. A. *Introduction to Lattices and Order*. Cambridge University Press, 1990.

[3] Gierz, G., Hofmann, K.H., Keimel, K., Lawson, J.D., Mislove, M.W., Scott, D.S. *Continuous Lattices and Domains*. Cambridge University Press, 2003.

[4] Goldblatt, R. *Topoi, The Categorial Analysis of Logic*. Revised edition. Elsevier Science Publishers B. V., 1984.

[5] Kostanek M., Waszkiewicz, P. Reconciliation of elementary order and metric fixpoint theorems. Preprint, disponível em: http://tcs.uj.edu.pl/Waszkiewicz, 2011.

[6] Mac Lane, S. *Categories for the working mathematician*. Springer: Berlin, Heidelberg, New York. 2nd ed., 1998.

[7] Malta, P. *Sobre os teoremas de ponto fixo de Tarski e Banach*. Monografia em Matemática (UFBA), 2011.

[8] Waszkiewicz, P. Common patterns for metric and ordered fixed point theorems. In Proceedings of the 7th Workshop on Fixed Points in Computer Science (Luigi Santocanale ed.), pp. 83-87, 2010.

Universidade Federal da Bahia
Email address: andreas@dcc.ufba.br, prsmalta@gmail.com