

UM ESTUDO SOBRE AS SOLUÇÕES REAIS DA  
EQUAÇÃO  $a^x = x^a$  ONDE  $a \geq 2$  É UM INTEIRO

RONALD SIMÕES DE MATTOS PINTO  
LILIANA MANUELA GASPAR CERVEIRA DA COSTA

1. INTRODUÇÃO

A existência e natureza das soluções reais da equação  $2^x = x^2$  foi tratada por E. L. Lima em [4] onde mostra que duas das três soluções reais da equação são inteiras e positivas, 2 e 4, e a terceira é negativa e irracional. O caso da equação  $p^x = x^p$ , em que  $p$  é um primo ímpar, foi tratado por G. G. Bastos em [1], no qual se concluiu pela existência de exatamente duas soluções reais:  $p$  e uma raiz irracional entre 1 e  $p$ . No presente artigo, generalizando os estudos anteriores, vamos investigar a natureza (quanto à racionalidade ou irracionalidade) das soluções reais da equação  $a^x = x^a$ , onde  $a \geq 2$  é um inteiro não necessariamente primo. Serão necessárias somente algumas ferramentas de Cálculo Diferencial e de Aritmética, incluindo o Teorema Fundamental da Aritmética. Para a representação dos gráficos apresentados foi utilizado o *software* Geogebra.

2. AS SOLUÇÕES REAIS DA EQUAÇÃO  $a^x = x^a$ ,  $a \geq 2$  INTEIRO

Examinaremos, nesta seção, a equação  $a^x = x^a$ , onde  $a \geq 2$  é um inteiro não necessariamente primo. Para isso mudaremos alguns dos argumentos utilizados em [1], de forma a dispensar a hipótese de  $a \geq 2$  ser um inteiro primo. Vamos analisar primeiramente as raízes positivas e depois as possíveis raízes negativas.

Começamos por observar que a equação  $a^x = x^a$ ,  $a \geq 2$  inteiro, possui no máximo duas soluções positivas. Para esse propósito, repare

---

Data de aceitação: 22 de setembro de 2019.

*Palavras chave.* Números irracionais, equações.

que quando  $x > 0$  então

$$a^x = x^a \Leftrightarrow x \ln a = a \ln x \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln a}{a} \Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln a}{a} = 0.$$

Portanto, estudar as soluções da equação  $a^x = x^a$  quando  $x$  é positivo é equivalente a estudar as raízes da função  $g_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g_a(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{\ln a}{a}$ . Derivando a função  $g_a$  temos  $g'_a(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ . Observando que  $1 - \ln x > 0$  quando  $x < e$  e  $1 - \ln x < 0$  quando  $x > e$ , constatamos que  $g$  é estritamente crescente no intervalo  $(0, e]$  e estritamente decrescente no intervalo  $[e, +\infty)$ . Logo a função  $g_a$  possui no máximo duas raízes.

Isso nos permite concluir que a equação  $a^x = x^a$ , nos casos em que  $a = 2$  ou  $a = 4$ , possui exatamente duas soluções positivas. Com efeito, os números 2 e 4 são, evidentemente, as duas soluções positivas das equações  $2^x = x^2$  e  $4^x = x^4$ .

Vamos mostrar agora que a equação  $a^x = x^a$ , nos casos em que  $a = 3$  ou  $a \geq 5$  possui exatamente duas soluções positivas.

Começaremos pelo caso em que  $a = 3$ . Note que estudar as soluções positivas da equação  $3^x = x^3$  é equivalente a estudar as raízes positivas da função  $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_3(x) = 3^x - x^3$ . Uma raiz é três. Para mostrar a existência da outra raiz, note que  $f_3(2) = 3^2 - 2^3 = 1 > 0$  e  $f_3\left(\frac{5}{2}\right) = \sqrt{243} - \frac{125}{8} < 0$ . Como  $f_3$  é contínua em todos os pontos do domínio, segue do Teorema do Valor Intermediário aplicado ao intervalo  $\left[2, \frac{5}{2}\right]$  que existe um  $\beta \in \left(2, \frac{5}{2}\right)$  tal que  $f_3(\beta) = 0$ . (O valor da raiz  $\beta$ , cuja estimativa pode ser obtida pelo Método de Newton, é aproximadamente 2,47805). A figura a seguir ilustra o gráfico da função  $f_3$ .

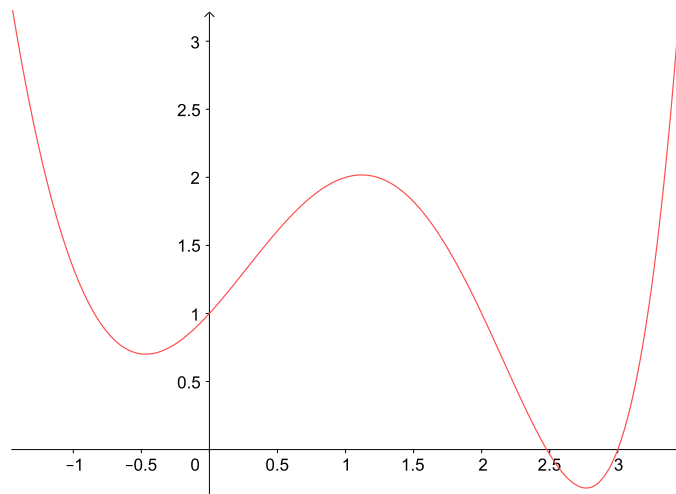


FIGURA 1. Gráfico da função  $f_3$ .

No caso em que  $a \geq 5$ , para cada  $a$ , devemos investigar as raízes positivas da função  $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_a(x) = a^x - x^a$ . Note que  $f_a(1) = a - 1 \geq 5 - 1 = 4 > 0$  e  $f_a(2) = a^2 - 2^a < 0$ , pois a desigualdade  $n^2 < 2^n$  é válida para todo número natural  $n \geq 5$ , como se pode verificar por indução. Como a função  $f_a$  é contínua em todos os pontos do domínio, segue do Teorema do Valor Intermediário aplicado ao intervalo  $[1, 2]$  que existe um real  $c \in (1, 2)$  tal que  $f(c) = 0$ . Portanto,  $a^c = c^a$ . A Figura 2 mostra a localização dessa raiz no intervalo  $(1, 2)$ . Já que  $a$  também é uma raiz de  $f_a$ , concluímos pela existência de exatamente duas raízes positivas.

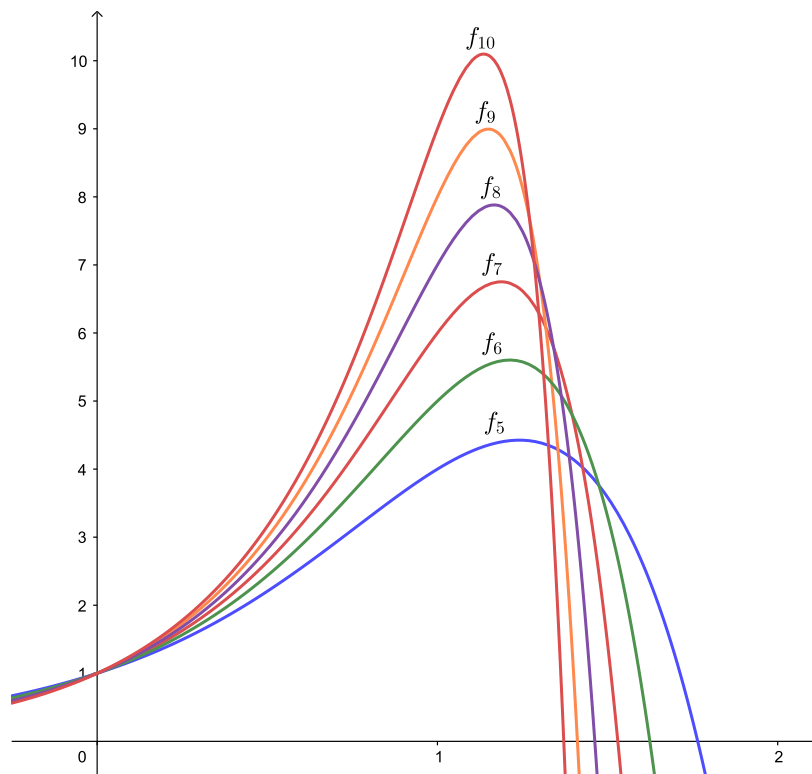


FIGURA 2. Gráfico das funções  $f_5, f_6, f_7, f_8, f_9$  e  $f_{10}$ .

Vamos agora mostrar que  $a \geq 5$  é a única raiz racional positiva de  $f_a$ . Daí decorre que a outra raiz positiva de  $f_a$  é um número irracional. Para isso, suponha que  $m$  e  $n$  são dois inteiros positivos e primos entre si tais que a fração  $\frac{m}{n}$  seja uma raiz de  $f_a$ . Assim,

$$f_a\left(\frac{m}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow a^{\frac{m}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^a \Leftrightarrow a^m = \left(\frac{m}{n}\right)^{an} \Leftrightarrow a^m n^{an} = m^{an}.$$

Decorre da última igualdade e do Teorema Fundamental da Aritmética que todos os fatores primos de  $n$  também são fatores primos de  $m$ . Mas isso não pode ocorrer pois  $m$  e  $n$  são primos entre si. Dessa maneira, somos obrigados a concluir que  $n$  é igual a 1 e a fração  $\frac{m}{n}$  é, na

realidade, o número inteiro  $\frac{m}{1} = m$ . Daqui resulta que a raiz  $c \in (1, 2)$  de  $f_a$  é um número irracional. A demonstração da irracionalidade da raiz  $\beta \in (2, 3)$  da função  $f_3$  é análoga. Isso encerra o nosso estudo sobre as soluções positivas da equação  $a^x = x^a$ ,  $a \geq 2$  inteiro.

Devemos investigar agora as soluções negativas da equação  $a^x = x^a$ ,  $a \geq 2$  inteiro. Vamos supor que  $a$  é ímpar. Nesse caso  $f_a$  não possui raiz negativa pois  $f_a(x) = a^x - x^a > 0$  se  $x < 0$ . Suponha agora que  $a$  é par. Repare que  $f_a(-1) = a^{-1} - (-1)^a = \frac{1-a}{a} < 0$  e  $f_a(0) = 1 > 0$ . Aplicando o Teorema do Valor Intermediário no intervalo  $[-1, 0]$  segue que  $f_a$  admite uma raiz  $c \in (0, 1)$ . Essa é a única raiz negativa. Com efeito, como  $f'_a(x) = a^x \ln a - ax^{a-1} > 0$ , para todo  $x \leq 0$  então  $f_a$  é estritamente crescente no intervalo  $(-\infty, 0]$  e, dessa forma, admite no máximo uma raiz. A Figura 3 ilustra o fato de as funções  $f_a$  terem uma raiz negativa no intervalo  $(-1, 0)$ , quando  $a$  é par, e não terem raízes negativas quando  $a$  é ímpar.

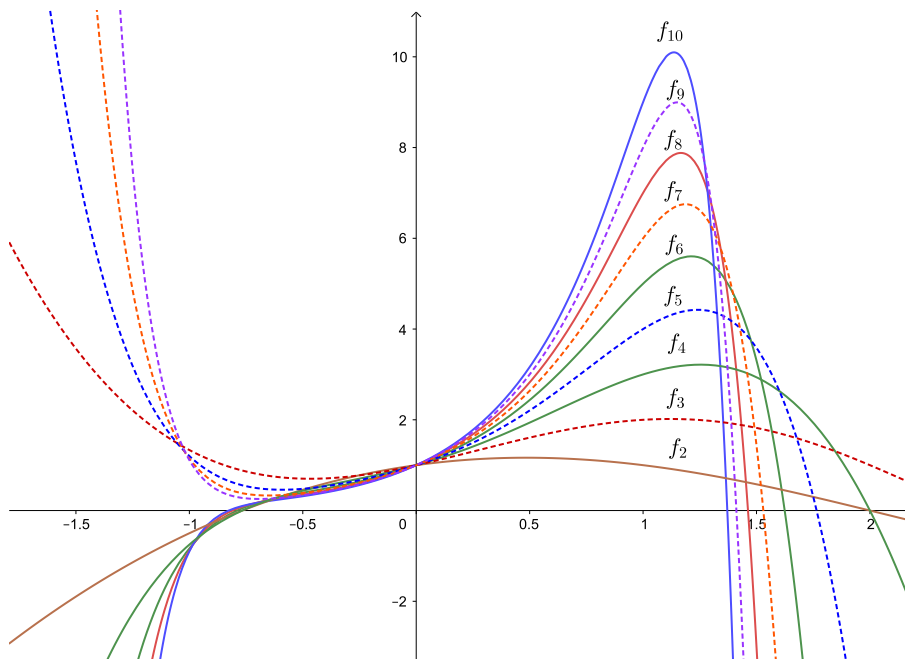


FIGURA 3. Representação gráfica de  $f_a$ : tracejado para  $a$  ímpar e traço cheio para  $a$  par.

Nosso objetivo agora é mostrar que a raiz negativa é irracional. Para isso, suponha que existem inteiros positivos  $m$  e  $n$  primos entre si tais que a fração  $-\frac{m}{n} \in (-1, 0)$  seja uma raiz de  $f$ . Assim,

$$f_a\left(-\frac{m}{n}\right) = 0 \Leftrightarrow a^{-\frac{m}{n}} = \left(-\frac{m}{n}\right)^a \Leftrightarrow a^{-m} = \left(\frac{m}{n}\right)^{an} \Leftrightarrow n^{an} = a^m m^{an}.$$

Segue da última igualdade e do Teorema Fundamental da Aritmética que todo fator primo de  $m$  é também fator primo de  $n$ . Mas isso não

pode ocorrer, pois  $m$  e  $n$  são primos entre si. Logo,  $m$  é igual a 1 e a igualdade acima fica

$$n^{an} = a.$$

Como  $a$  é par,  $n$  também é par. Assim, podemos escrever  $a = 2^k b$  e  $n = 2^\ell c$ , com  $b$  e  $c$  ímpares e  $k, \ell \geq 1$ . Desse modo, temos:

$$n^{an} = a \Leftrightarrow (2^\ell c)^{(2^k b)2^\ell c} = 2^k b \Leftrightarrow 2^{\ell \cdot 2^{k+\ell} \cdot bc} \cdot c^{2^{k+\ell} \cdot bc} = 2^k b.$$

Como  $b$  e  $c$  são ímpares, concluímos que  $\ell \cdot 2^{k+\ell} \cdot bc = k$ . Mas isso não pode ocorrer pois  $2^k > k$  para todo  $k \geq 1$ . Dessa forma, a raiz  $c \in (-1, 0)$  é um número irracional.

### 3. AS SOLUÇÕES IRRACIONAIS DA EQUAÇÃO $a^x = x^a$ ONDE $a \geq 2$ É INTEIRO, SÃO NÚMEROS TRANSCENDENTES

Nesta breve seção vamos mostrar, com o auxílio do Teorema de Gelfond-Schneider, que as soluções irracionais da equação  $a^x = x^a$ , onde  $a \geq 2$  é inteiro, são números transcendentos. Antes, no entanto, convém lembrar de alguns fatos a respeito dos números algébricos e transcendentos. Um número complexo é dito *algébrico* quando é raiz de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros. O conjunto dos números algébricos é fechado em relação à multiplicação. Isto é, se  $\alpha$  e  $\beta$  são dois números algébricos, então o produto  $\alpha\beta$  é também um número algébrico [2]. Em particular, se  $\alpha$  é algébrico e  $k$  é um inteiro positivo, então  $\alpha^k$  é também algébrico. Um número (complexo) que não é algébrico é dito *transcendente*. Existe uma infinidade (não enumerável) de números transcendentos [6]. Por exemplo, os números  $e$  e  $\pi$  são transcendentos [2].

Vamos provar que as soluções irracionais da equação  $a^x = x^a$ ,  $a \geq 2$  inteiro, são números transcendentos. Para isso, utilizaremos o Teorema de Gelfond-Schneider enunciado a seguir: *sejam  $\alpha$  e  $\beta$  números algébricos. Se  $\alpha \neq 0$ ,  $\alpha \neq 1$  e  $\beta$  não for um real racional, então  $\alpha^\beta$  é transcendente.* A demonstração desse fato encontra-se nas referências [5] ou [7].

Seja  $x_0$  uma solução irracional da equação  $a^x = x^a$ . Vamos supor que  $x_0$  é um irracional algébrico. Então, por um lado,  $x_0^a$  também será algébrico pois, conforme mencionado anteriormente, o produto de números algébricos é também um número algébrico. Por outro lado, decorre, do Teorema de Gelfond-Schneider, que o número  $a^{x_0}$  é transcendente pois  $a$  é, evidentemente, um número algébrico e  $x_0$  é, por hipótese, irracional. Daí, não podemos ter a igualdade  $a^{x_0} = x_0^a$ . Ou seja, as soluções irracionais são números transcendentos. Desse fato decorre que as soluções irracionais não são construtíveis com régua e compasso, já que todo número construtível é algébrico (de grau igual a uma potência de 2), ver [3].

## REFERÊNCIAS

- [1] BASTOS, G. G. *Os Zeros Reais da Equação  $p^x = x^p$ ,  $p$  Primo*, Revista Matemática Universitária nº 34, 2003.
- [2] FIGUEIREDO, D. G. *Números Irracionais e Transcendentes*, 3ª Edição. Coleção Iniciação Científica, SBM, Rio de Janeiro, 2002.
- [3] HERSTEIN, I. N. *Topics in Algebra*. 2. ed. Wiley India Pvt. Limited, 2006.
- [4] LIMA, E. L. *Quais são as raízes da equação  $x^2 = 2^x$ ?* Revista do Professor de Matemática, nº 3, 1983.
- [5] MARQUES, DIEGO. *Teoria dos números transcendentos*, Coleção Textos Universitários, Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [6] NIVEN, I. *Números: Racionais e Irracionais*; Tradução de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: SBM, 1990.
- [7] NIVEN I. *Irrational Numbers*. Rahway, NJ: The Mathematical Association of America, 1956.

COLÉGIO PEDRO II

Email address: [ronaldsimoies@gmail.com](mailto:ronaldsimoies@gmail.com), [imgccosta@gmail.com](mailto:imgccosta@gmail.com)