RMU
REVISTA MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA

SBM
SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Revista Matemática Universitária, vol. 1, 2020
ISSN: 2675-5254 – **DOI:** https://doi.org/10.21711/26755254/rmu202014

RESOLVENDO RECORRÊNCIAS

ANTONIO CAMINHA

Resumo. O problema de obtenção de fórmulas posicionais para sequências recorrentes é de importância central em Combinatória. Este artigo mostra como a teoria elementar de séries de potências complexas pode ser utilizada para resolvê-lo. Primeiro, no caso mais simples de recorrências lineares de coeficientes constantes, depois, em um caso não linear combinatorialmente relevante.

1. Introdução

Em Combinatória, é bastante comum que a modelagem analítica de problemas recursivos traduza-se no problema de obter fórmulas posicionais para sequências que satisfaçam relações de recorrência. Nesse sentido, cursos introdutórios de Matemática Discreta ou Combinatória gastam tempo considerável apresentando técnicas para a resolução de tais recorrências, o mais das vezes apoiando-se no uso de séries de potências *formais*.

Em que pese o fato de a correção do uso de séries formais poder ser justificada de maneira relativamente simples (cf. [5], por exemplo), esse ponto não é usualmente apresentado, ou mesmo mencionado, aos estudantes. Por outro lado, mesmo quando outras disciplinas de um curso de Licenciatura ou Bacharelado em Matemática ou Computação ocupam algum tempo com o tema, usualmente o fazem somente para recorrências lineares de coeficientes constantes e no contexto de tópicos bem mais avançados, por exemplo o teorema da decomposição primária em Álgebra Linear.

Uma vez que recorrências de coeficientes analíticos podem ser vistas como análogos discretos da classe correspondente de equações diferenciais, espera-se que a teoria de séries de potências complexas possa ser aplicada com sucesso em seu estudo. Esta nota pretende mostrar que esse é de fato o caso, de sorte que o tema passe a ser acessível a estudantes que tenham sido apresentados à teoria básica de séries de potências, conforme desenvolvida no Capítulo 11 de [1], por exemplo.

Por simplicidade, começaremos analisando o caso de recorrências lineares de coeficientes constantes, mostrando no Teorema 2.1 como resolvê-las rigorosamente;

Data de aceitação: 30 de setembro de 2019.

em seguida, aplicamos esse resultado à análise de progressões aritméticas de ordem superior.

No que concerne o caso não linear, mostramos como argumentos de análise real elementar, juntamente com a teoria de funções de uma variável complexa fornecem uma demonstração simples (e, tanto quanto saibamos, nova) da clássica *fórmula de inversão lagrangiana*. Para os menos familiarizados com o tema, ilustramos sua importância mostrando como ela resolve a famosa recorrência de Catalan.

2. Recorrências lineares de coeficientes constantes

Uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ é dita *recorrente linear* (de coeficientes constantes), se existirem um inteiro positivo k e números complexos $u_0, \ldots, u_{k-1}$, nem todos nulos, tais que

$$a_{n+k} = u_{k-1}a_{n+k-1} + \cdots + u_0 a_n, \tag{1}$$

para todo inteiro $n \geq 1$.

O natural k é denominado a *ordem* da recorrência linear e a equação (1) é a *relação de recorrência* ou, simplesmente, a *recorrência* satisfeita pela sequência. Neste caso, $(a_n)_{n\geq 1}$ é também denominada uma *recorrência linear de ordem* k.

Dados $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$, é imediato verificar que há exatamente uma sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfazendo (1) e tal que $a_j = \alpha_j$, para $1 \leq j \leq k$. Portanto, uma recorrência linear de ordem k fica totalmente determinada quando conhecemos a relação de recorrência linear por ela satisfeita e os valores de seus k primeiros termos.

Se $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfaz (1), definimos seu *polinômio característico* como o polinômio

$$f(X) = X^k - u_{k-1}X^{k-1} - \cdots - u_1 X - u_0. \tag{2}$$

Nosso propósito, aqui, é dar uma demonstração elementar do seguinte resultado.

Teorema 2.1. *Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência satisfazendo, para $n \geq 1$, a recorrência linear (1), onde $u_0, \ldots, u_{k-1}$ são números complexos dados, com $u_0 \neq 0$. Sejam z_1, ..., z_l as raízes duas a duas distintas do polinômio característico de $(a_n)_{n\geq 1}$, com multiplicidades respectivamente iguais a m_1, ..., m_l. Então, para $n \geq 1$ temos*

$$a_n = p_1(n-1)z_1^{n-1} + \cdots + p_l(n-1)z_l^{n-1},$$

onde $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{C}[X]$ são polinômios de graus menores ou iguais a $m_1 - 1$, ..., $m_l - 1$, respectivamente, os quais são totalmente determinados pelos valores de a_1, ..., a_k.

Em linhas gerais, a dinâmica da demonstração é a seguinte: inicialmente, mostramos que a série de potências

$$F(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$$

converge em um disco do plano complexo centrado em 0. Em seguida, sendo f o polinômio característico da sequência e $h(X) = -u_0X^k - u_1X^{k-1} - \cdots - u_{k-1}X + 1$ seu recíproco, mostramos que

$$h(z)F(z) = zp(z), \tag{3}$$

para um certo polinômio $p \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, de grau $\partial p \leq k-1$. Por fim, expandimos $\frac{zp(z)}{h(z)}$ em um disco centrado em 0 e de raio possivelmente menor, e aplicamos a (3) a unicidade da expansão em série de potências. Vejamos os detalhes.

Prova. Afirmamos inicialmente que existe uma constante $R_0 > 0$ tal que $|a_n| \leq R^n$, para todos $n \geq 1$ e $R > R_0$. De fato, se $|a_n| \leq R^n$ para $1 \leq n < m$, com $m > k$, então a desigualdade triangular fornece

$$\begin{aligned} |a_m| &\leq |u_{k-1}|R^{m-1} + \cdots + |u_1|R^{m-k+1} + |u_0|R^{m-k} \\ &= R^{m-k}(|u_{k-1}|R^{k-1} + \cdots + |u_1|R + |u_0|). \end{aligned}$$

Portanto, se $g(X) = X^k - |u_{k-1}|X^{k-1} - \cdots - |u_1|X - |u_0|$ e $R_0 > 0$ for tal que $g(R) > 0$ para $R > R_0$, então, para cada um de tais Rs, temos pelos cálculos acima que $|a_m| \leq R^{m-k} \cdot R^k = R^m$. Basta, pois, escolhermos de início $R_0 > 0$ tal que $|a_1|, \ldots, |a_k| \leq R_0$ e $g(R) > 0$, para todo $R > R_0$.

Uma vez que $|a_n| \leq R^n$ para todo inteiro $n \geq 1$ e todo $R > R_0$, o teste da comparação garante a convergência de F no disco aberto $D(0; \frac{1}{R})$ do plano complexo. Para mostrar que (3) vale em tal disco, temos primeiramente que

$$\begin{aligned} h(z)F(z) &= -\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{n \geq k-j+1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n \geq 1} a_n z^n \\ &= -\sum_{n \geq k+1} u_0 a_{n-k} z^n - \sum_{n \geq k} u_1 a_{n-k+1} z^n \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n \geq k} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n \geq k} a_n z^n \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n=k-j+1}^{k-1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n=1}^{k-1} a_n z^n. \end{aligned}$$

Agora, segue de (1) que

$$\begin{aligned} &-\sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n \geq k} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n \geq k} a_n z^n = \sum_{n \geq k} \left(-\sum_{j=2}^{k-1} u_j a_{n-k+j} + a_n \right) z^n \\ &= \left(-\sum_{j=2}^{k-1} u_j a_j + a_k \right) z^k + \sum_{n \geq k+1} \left(u_0 a_{n-k} + u_1 a_{n-k+1} \right) z^n. \end{aligned}$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
h(z)F(z) &= -\sum_{n\geq k+1} u_0 a_{n-k} z^n - \sum_{n\geq k} u_1 a_{n-k+1} z^n \\
&\quad + \left(-\sum_{j=2}^{k-1} u_j a_j + a_k\right) z^k + \sum_{n\geq k+1} \left(u_0 a_{n-k} + u_1 a_{n-k+1}\right) z^n \\
&\quad - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n=k-j+1}^{k-1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n=1}^{k-1} a_n z^n \\
&= \left(a_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_j a_j\right) z^k - \sum_{j=2}^{k-1} \sum_{n=k-j+1}^{k-1} u_j a_{n-k+j} z^n + \sum_{n=1}^{k-1} a_n z^n,
\end{aligned}
$$

e basta escrever a última expressão acima como $zp(z)$.

Como $h(0) = 1 \neq 0$, aumentando R, se necessário, podemos supor que $h(z) \neq 0$ para $z \in D(0; \frac{1}{R})$. Por outro lado, sendo $z_1, \ldots, z_l$ as raízes complexas de f, com multiplicidades respectivamente iguais a $m_1, \ldots, m_l$, temos

$$h(X) = (1 - z_1 X)^{m_1} \ldots (1 - z_l X)^{m_l},$$

de sorte que

$$F(z) = \frac{zp(z)}{(1 - z_1 z)^{m_1} \ldots (1 - z_l z)^{m_l}}, \tag{4}$$

para todo $z \in D(0; \frac{1}{R})$.

Agora, como p tem grau menor que o do denominador de (4), aplicando a fórmula de decomposição em frações parciais a (4), concluímos pela existência, para $1 \leq j \leq l$ e $1 \leq n_j \leq m_j$, de constantes d_{jn_j}, unicamente determinadas pelos coeficientes de p (e, portanto, por $a_1, a_2, \ldots, a_k$ e $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}$), tais que

$$F(z) = z \sum_{j=1}^{l} \sum_{n_j=1}^{m_j} \frac{d_{jn_j}}{(1 - z_j z)^{n_j}}, \tag{5}$$

para todo $z \in D(0; \frac{1}{R})$.

Para continuar, precisamos do seguinte fato, o qual pode ser mostrado facilmente a partir do caso $m = 1$, por indução sobre m ou por derivação termo a termo: se $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $m \in \mathbb{N}$, então

$$\frac{1}{(1 - az)^m} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+m-1}{m-1} a^n z^n, \tag{6}$$

para todo $z \in D(0; \frac{1}{|a|})$.

Em particular, se $r = \min\left\{\frac{1}{R}, \frac{1}{|z_1|}, \ldots, \frac{1}{|z_l|}\right\}$, então (6) permite escrever

$$\frac{1}{(1 - z_j z)^{n_j}} = \sum_{n\geq 0} \binom{n+n_j-1}{n_j-1} z_j^n z^n,$$

para $1 \leq j \leq l$, $1 \leq n_j \leq m_j$ e $z \in D(0;r)$. Portanto, voltando a (5) e para $|z| < r$, temos

$$\begin{aligned} F(z) &= z \sum_{j=1}^{l} \sum_{n_j=1}^{m_j} \sum_{n \geq 0} d_{jn_j} \binom{n+n_j-1}{n_j-1} z_j^n z^n \\ &= \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{j=1}^{l} \sum_{n_j=1}^{m_j} d_{jn_j} \binom{n+n_j-2}{n_j-1} z_j^{n-1} \right) z^n. \end{aligned}$$

Por fim, uma vez que a_n é o coeficiente de z^n na série que define F, segue da última igualdade acima e da unicidade da expansão em série que

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{n_j=1}^{m_j} d_{jn_j} \binom{n+n_j-2}{n_j-1} z_j^{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{n_j=1}^{m_j} \frac{d_{jn_j}}{(n_j-1)!} (n+n_j-2)(n+n_j-3)\ldots(n+1)n z_j^{n-1} \\ &= \sum_{j=1}^{l} p_j(n-1) z_j^{n-1}, \end{aligned}$$

onde

$$p_j(X) = \sum_{n_j=1}^{m_j} \frac{d_{jn_j}}{(n_j-1)!} (X+n_j-1)(X+n_j-2)\ldots(X+1) z_j^{n-1}$$

é um polinômio de grau menor ou igual a $m_j - 1$. □

Concluímos esta seção apresentando uma aplicação interessante do Teorema 2.1, a qual também não é conhecida como deveria.

Exemplo 2.2. *Dadas uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ e um inteiro $m > 1$, dizemos que $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma*

i. PA de ordem 1 *se $(a_n)_{n \geq 1}$ for uma PA (progressão aritmética).*
ii. PA de ordem m *se a sequência $(b_n)_{n \geq 1}$, tal que $b_n = a_{n+1} - a_n$ para $n \geq 1$, for uma PA de ordem $m - 1$.*

Uma sequência $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma PA de ordem m se, e só se,

$$\binom{m+1}{0} a_{n+m+1} - \binom{m+1}{1} a_{n+m} + \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} a_n = 0, \tag{7}$$

para todo $n \geq 1$. Esse fato pode ser facilmente demonstrado por indução sobre $m \geq 1$, com o auxílio da relação de Stifel entre números binomiais.

Se $(a_n)_{n \geq 1}$ é uma PA de ordem m, então (7) vale para todo $n \geq 1$, de sorte que o polinômio característico de $(a_n)_{n \geq 1}$ é

$$\begin{aligned} f(X) &= \binom{m+1}{0} X^{m+1} - \binom{m+1}{1} X^m + \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m+1}{m+1} \\ &= (X-1)^{m+1}. \end{aligned}$$

Assim, o Teorema 2.1 garante a existência de constantes α_0, α_1, ..., α_m tais que

$$a_n = \alpha_0 + \alpha_1(n-1) + \cdots + \alpha_m(n-1)^m,$$

para todo $n \geq 1$. Avaliando a relação acima para $n = 1$, obtemos $\alpha_0 = a_1$; avaliando-a para $n = 2, \ldots, m+1$, obtemos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ como soluções do sistema linear de equações

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m & = & a_2 - a_1 \\ 2\alpha_1 + 2^2\alpha_2 + \cdots + 2^m\alpha_m & = & a_3 - a_1 \\ \cdots & & \cdots \\ m\alpha_1 + m^2\alpha_2 + \cdots + m^m\alpha_m & = & a_{m+1} - a_1 \end{cases}.$$

3. A fórmula de inversão lagrangiana

Conforme veremos mais adiante, a modelagem de situações combinatórias interessantes, como o clássico *problema de Catalan*, traduz-se na busca de soluções analíticas $y = y(z)$ para uma equação da forma

$$y = z\phi(y), \tag{8}$$

em que $\phi : D(0; r) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função analítica complexa satisfazendo $\phi(0) \neq 0$.

Uma tal solução $y(z) = \sum_{k\geq 1} y_n z^n$ sempre existe num disco $D(0; s)$, para algum $s > 0$, e a fórmula de inversão lagrangiana explicita y_n em termos do coeficiente de z^{n-1} na expansão em série de potências da função $z \mapsto \phi(z)^n$. Mais precisamente, temos o seguinte

Teorema 3.1 (Lagrange)**.** *Seja $\phi : D(0; r) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função analítica complexa tal que $\phi(0) \neq 0$, e $\phi(z) = \sum_{k\geq 0} \phi_k z^k$ sua expansão em série de potências em torno de 0. Então, existe $s > 0$ tal que, para $z \in D(0; s) \subset \mathbb{C}$, a equação $y = z\phi(y)$ admite uma única solução analítica $y(z) = \sum_{k\geq 1} y_k z^k$. Ademais,*

$$y_n = \frac{1}{n}[u^{n-1}](\phi(u)^n) \tag{9}$$

para todo inteiro $n \geq 1$, onde $[u^{n-1}](\phi(u)^n)$ denota o coeficiente de u^{n-1} na expansão de $u \mapsto \phi(u)^n$ centrada em 0.

A ideia da prova é, primeiramente, utilizar o teorema da aplicação implícita para mostrar que (8) admite uma única solução continuamente diferenciável $y = y(z)$ numa vizinhança de 0, com $y(0) = 0$. Em seguida, mostramos que, vista com função complexa, y é analítica. Por fim, utilizamos a fórmula integral de Cauchy para obter (9). Vamos aos detalhes.

Prova. Consideremos a função $F : \mathbb{C} \times D(0; r) \to \mathbb{C}$ dada por $F(y, z) = y - z\phi(y)$. Identificando (da maneira usual) $\mathbb{C}$ com $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C} \times D(0; r)$ com um aberto de $\mathbb{R}^4$, e calculando a derivada de Fréchet d_yF de F com respeito a y, obtemos

$$d_yF(y, z) = \mathrm{Id} - z\phi'(y),$$

onde $\phi'(y)$ denota a derivada complexa de ϕ em y e identificamos $z\phi'(y)$ com um operador linear em $\mathbb{R}^2$, da maneira usual.

Agora, tome $s > 0$ tal que $\phi(y) \neq 0$ para todo $y \in D(0;s)$, e note que $F^{-1}(0) = \{(y,z); F(y,z) = 0\}$ é não vazio, pois contém pelo menos o ponto $(0,0)$. Então, em $F^{-1}(0) \cap (D(0;s) \times D(0;r))$, temos que

$$d_y F(y,z) = \mathrm{Id} - \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y.$$

(Aqui, novamente vemos $\frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y$ como um operador linear em $\mathbb{R}^2$.)

Mas como $\lim_{y \to 0} \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y = 0$, podemos supor que $s > 0$ foi tomado tão pequeno que $\left| \frac{\phi'(y)}{\phi(y)} y \right| < 1$ para $y \in D(0;s)$. Portanto, em $F^{-1}(0,0) \cap (D(0;s) \times D(0;r))$ temos

$$d_y F(y,z) = \mathrm{Id} - T_y,$$

onde $T_y : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador linear de norma $||T_y|| < 1$.

Precisamos, agora, da afirmação a seguir, a qual é uma decorrência imediata do teorema do núcleo e da imagem.

<u>Afirmação</u> Se $T : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ é um operador linear com norma $||T|| < 1$, então o operador linear $S = \mathrm{Id} - T$ é invertível.

Pela afirmação, a derivada $d_y F(y,z) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é um operador invertível, e o teorema da aplicação implícita ([4], capítulo 5) garante que, diminuindo r e s um pouco mais, se necessário, $F^{-1}(0)$ define o gráfico de uma aplicação diferenciável (real) $y = y(z) : D(0;r) \to D(0;s)$, tal que $y(0) = 0$; em particular, $y = y(z)$ é contínua.

Afirmamos que a função y é injetiva em $D(0;r)$. De fato, para $z_1, z_2 \in D(0;r)$, se $y(z_1) = y(z_2) = w$, então a relação $y(z) = z\phi(y(z))$ dá-nos

$$z_1 \phi(w) = z_1 \phi(y(z_1)) = y(z_1) = y(z_2) = z_2 \phi(y(z_2)) = z_2 \phi(w);$$

mas, como $\phi(w) \neq 0$ para $w \in D(0;s)$, segue que $z_1 = z_2$.

Mostremos agora que y é uma função analítica (complexa) de $z \in D(0;r)$ (isso é uma decorrência imediata da teoria de funções de várias variáveis complexas, mas daremos uma demonstração elementar, para tornar a exposição acessível a um público mais amplo). Se $z, z_0 \in D(0;r)$, com $z \neq z_0$, então a injetividade de y garante que $y(z) \neq y(z_0)$, e daí

$$\begin{aligned}
\frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0} &= \frac{z\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z_0))}{z - z_0} \\
&= \frac{z\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z))}{z - z_0} + \frac{z_0\phi(y(z)) - z_0\phi(y(z_0))}{z - z_0} \\
&= \phi(y(z)) + z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} \cdot \frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{y(z) - y(z_0)}{z - z_0} \left(1 - z_0 \frac{\phi(y(z)) - \phi(y(z_0))}{y(z) - y(z_0)} \right) = \phi(y(z)). \tag{10}$$

Agora, a continuidade de y fornece $\lim_{z\to z_0} y(z) = y(z_0)$, de sorte que

$$\lim_{z\to z_0} z_0\frac{\phi(y(z))-\phi(y(z_0))}{y(z)-y(z_0)} = \lim_{y(z)\to y(z_0)} z_0\frac{\phi(y(z))-\phi(y(z_0))}{y(z)-y(z_0)}$$
$$= z_0\phi'(y(z_0)),$$

o qual tende a 0 quando $z_0 \to 0$. Podemos, então, supor adicionalmente que r foi escolhido tão pequeno que $z_0\phi'(y(z_0)) \neq 1$ em $D(0;r)$. Portanto, fazendo $z \to z_0$ em (10), concluímos que $y'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{y(z)-y(z_0)}{z-z_0}$ existe e

$$y'(z_0) = \frac{\phi(y(z_0))}{1 - z_0\phi'(y(z_0))}.$$

Em particular, $y'(0) = \phi(0) = a_0 \neq 0$ e y é uma função analítica complexa de z, para $z \in D(0;r)$.

Se $y(z) = y_0 + y_1 z + \ldots + y_n z^n + \cdots$ é a expansão de y em série de potências de z em $D(0;r)$, então $y'(z) = y_1 + 2y_2 z + \cdots + ny_{n-1}z^{n-1} + \cdots$. A fórmula integral da Cauchy (veja [6], por exemplo) dá-nos

$$ny_n = [z^{n-1}](y') = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{y'(z)}{z^n}dz, \tag{11}$$

onde $\gamma : [0, 2\pi] \to D(0;r)$ é uma qualquer curva C^1 por partes tal que $\mathrm{Ind}(\gamma; 0) = 1$. Mas $y(z) = z\phi(y(z))$ fornece $z = \frac{y(z)}{\phi(y(z))}$, de maneira que

$$ny_n = [z^{n-1}](y') = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\phi(y(z))^n y'(z)dz}{y(z)^n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{y\circ\gamma} \frac{\phi(w)^n dw}{w^n}.$$

Por fim, como y é um difeomorfismo conforme sobre sua imagem, com $y(0) = 0$, segue que

$$\mathrm{Ind}(y\circ\gamma; 0) = \mathrm{Ind}(\gamma; 0) = 1.$$

Assim, a igualdade acima nos dá, novamente por aplicação da fórmula integral de Cauchy,

$$ny_n = [u^{n-1}](\phi(u)^n).$$

□

Exemplo 3.2. *Dado um inteiro $n \geq 3$, o problema de Catalan consiste em calcular o número a_n de maneiras distintas de particionar um polígono convexo de n lados dado em triângulos, utilizando diagonais que não se intersectem no interior do polígono.*

Pondo $a_1 = 0$ e $a_2 = 1$, é possível mostrar (cf. o capítulo 3 de [2], por exemplo) que a sequência $(a_n)_{n\geq 1}$ satisfaz, para $n \geq 3$, a recorrência

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k+1}. \tag{12}$$

Fazendo $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n+2} z^n$, um cálculo formal garante que (12) é satisfeita se, e só se,

$$f(z) - 1 = zf(z)^2.$$

Mas, com $y(z) = f(z) - 1 = \sum_{n\geq 1} a_{n+2}z^n$*, a última relação acima é o mesmo que*

$$y = z(y+1)^2. \tag{13}$$

Então, pondo $\phi(z) = (z+1)^2$*, o Teorema 3.1 garante que (13) realmente admite uma única solução* $y = y(z)$*, analítica em um disco centrado em* 0 *e tal que*

$$a_{n+2} = \frac{1}{n}[u^{n-1}](u+1)^{2n} = \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

para $n \geq 1$*.*

O exemplo anterior é uma pequena ilustração do uso da fórmula de inversão lagrangiana em Combinatória. Para muitas outras, veja a referência [3], onde os autores também aplicam a fórmula de inversão para obter estimativas assintóticas para os números de configurações possíveis em várias situações combinatórias.

Referências

[1] T. Apostol. *Calculus, Volume I.* John Wiley & Sons, Nova Iorque, 1967.
[2] A. Caminha. *An Excursion Through Elementary Mathematics III. Discrete Mathematics and Polynomial Algebra.* Springer Nature, Cham, 2018.
[3] P. Flajolet e R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009.
[4] E. L. Lima. *Curso de Análise, vol. 2.* IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
[5] I. Niven. *Formal Power Series.* Amer. Math. Monthly **76** (1969), 871-889.
[6] M. Soares. *Cálculo em uma Variável Complexa, Quinta Edição.* SBM, Rio de Janeiro, 2016.

Universidade Federal do Ceará
Email address: `caminha@mat.ufc.br`